

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**HIDROELASTIČNI MODEL DINAMIČKOG ODZIVA
KONTEJNERSKIH BRODOVA NA VALOVIMA**

DOKTORSKI RAD

Mentor: akademik Ivo Senjanović
Komentor: dr.sc. Šime Malenica

Stipe Tomašević

ZAGREB, 2007.

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK:	629.5.015:629.544
Ključne riječi:	kontejnerski brodovi, hidroelastičnost, valno opterećenje, dinamički odziv, pruženje, podrhtavanje, spregnute horizontalne i torzijske vibracije, metoda konačnih elemenata, teorija linearnog potencijalnog strujanja, 1D strukturni model, 3D hidrodinamički model, frekvencijsko područje, vremensko područje, metoda superponiranja prirodnih oblika vibriranja
Znanstveno područje:	TEHNIČKE ZNANOSTI
Znanstveno polje:	Brodogradnja
Institucija u kojoj je rad izrađen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilište u Zagrebu
Mentor rada:	Akademik Ivo Senjanović
Komentor rada:	Dr. sc. Šime Malenica
Broj stranica:	190
Broj slika:	105
Broj tablica:	3
Broj korištenih bibliografskih jedinica:	82
Datum obrane:	04.05.2007.
Povjerenstvo:	Dr. sc. Većeslav Čorić, red. profesor Akademik Ivo Senjanović Dr. sc. Šime Malenica, Bureau Veritas, Pariz Dr. sc. Vedran Žanić, red. profesor Dr. sc. Andreja Werner, red. profesor
Institucija u kojoj je rad pohranjen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

ZAHVALA

Prvenstveno se zahvaljujem svom mentoru i komentoru, akademiku Ivi Senjanoviću i dr.sc. Šimi Malenici – ne samo da su me tijekom izrade ovog rada korisnim savjetima usmjeravali, već su me i poticali da ustrajem.

Zahvaljujem se i ostalim članovima povjerenstva za ocjenu i obranu disertacije na strpljenju pri čitanju i recenziji rada, kao i na korisnim primjedbama koje su ga učinile boljim.

Osim toga, moram spomenuti i kolegu iz ureda, dr.sc. Smiljka Rudana, kao i dr.sc. Zorana Mravka koji mi je, zajedno s dr.sc. Malenicom, bio od iznimne pomoći za vrijeme šestomjesečnog boravka u Parizu, u sklopu izrade doktorskog rada.

Zagreb, ožujak 2007.

Stipe Tomašević

SADRŽAJ

Predgovor	i
Sažetak	ii
Summary	iii
Ključne riječi	iv
Key words	v
Popis oznaka	vi
Popis slika	ix
Popis tablica	xiii
1 Uvod	1
1.1 Razvoj kontejnerskih brodova	1
1.2 Opis problema	11
1.3 Hipoteza rada	12
1.4 Pregled osnovne literature	13
2 Strukturni model	16
2.1 Uvod	18
2.2 Poprečne vibracije nosača	18
2.2.1 Euler – Bernoullijeva greda	18
2.2.2 Timošenkova greda	19
2.3 Torzijske vibracije nosača	22
2.3.1 Gredni model trupa zatvorenog poprečnog presjeka	23
2.3.2 Gredni model trupa otvorenog poprečnog presjeka	23
2.4 Spregnute horizontalne i torzijske vibracije nosača	24
2.5 Harmonijske vibracije	28
2.5.1 Poprečne vibracije nosača	30
2.5.2 Torzijske vibracije nosača	31
2.5.3 Spregnute horizontalne i torzijske vibracije nosača	31
2.6 Rješenje problema spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija broskog trupa metodom konačnih elemenata	32
2.6.1 Uvod	33
2.6.2 Utemeljenost metode konačnih elemenata na varijacijskom principu o stacionarnosti ukupne energije	33
2.6.3 Diferencijalne jednačbe harmonijskih spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija za konačni element	35

2.6.4	Ukupna energija konačnog elementa	37
2.6.5	Matrična jednadžba konačnog elementa	38
2.6.6	Matrična jednadžba broskog trupa	51
2.6.7	Rješenje problema slobodnih vibracija	58
3	Hidrodinamički model.....	60
3.1	Osnovni problem rubnih vrijednosti	60
3.2	Teorija linearnih (Airyjevih, harmonijskih) valova	66
3.3	Brod na valovima	74
3.3.1	Susretna frekvencija	77
3.4	Njihanje elastičnog broda na harmonijskim valovima.....	80
3.4.1	Sile kod njihanja elastičnog tijela na harmonijskim valovima.....	86
3.5	Utjecaj brzine napredovanja.....	98
3.6	Metoda integralnih jednadžbi	105
4	Hidroelastični model	111
4.1	Metoda superponiranja prirodnih oblika vibriranja	111
4.2	Sprezanje strukturnog i hidrodinamičkog modela	113
4.3	Jednadžba gibanja u frekvencijskom području	117
4.4	Jednadžba gibanja u vremenskom području.....	118
5	Metodologija hidroelastične analize.....	121
6	Numerički primjeri.....	124
6.1	Provjera strukturnog modela na primjeru prizmatičnog nosača s karakteristikama glavnog rebra kontejnerskog broda	124
6.2	Odziv elastične barže na valovima.....	134
6.3	Odziv kontejnerskog broda na valovima.....	147
7	Zaključak.....	163
7.1	Općenito	163
7.2	Smjernice za daljnja istraživanja.....	165
7.3	Zaključak doktorskog rada	166
	Litaratura	167
	Kratki životopis	173
	Short biography	174
	Prilog A	175
	Prilog B	181
	Prilog C	185

PREDGOVOR

Posljednje desetljeće donijelo je znatne promjene na tržištu prijevoza roba kontejnerima. Uslijed visokih stopa rasta međunarodne trgovine, potaknutih napredujućom globalizacijom, kao i spektakularnim uzletom kineskog gospodarstva (što treba posebno istaknuti), nastavlja se stalni rast potražnje za takvom vrstom transporta.

Odluka najvećih svjetskih brodarskih kompanija o pokušaju unapređenja vlastite konkurentnosti uvođenjem sve većih brodova koji su ekonomični svojom veličinom, okončala je desetogodišnju stagnaciju maksimalne veličine kontejnerskih brodova. Napuštanje ograničenja dimenzija, nametnutih mogućnošću prolaska kroz Panamski kanal, dovelo je do svojevrsne utrke među najvećim prevoznicima – sve veći brodovi u službi više nisu posljedica isključivo ekonomskih promišljanja i teško se oteti dojmu kako to pomalo nije i pitanje prestiža. Ne samo da se od sredine 1990-ih neprestano pomiču granice nosivosti, već se znatno povećava i broj veoma velikih kontejnerskih brodova koji plove svjetskim morima.

Budući da tako veliki brodovi iskaču van opsega iskustvene baze na kojoj se temelje pravila klasifikacijskih društava, njihovom je projektiranju nužno posvetiti odgovarajuću pozornost, tako da se u pravilu zahtijeva i provjera zadovoljavanja projektnih kriterija (granice tečenja, izvijanja i zamornog oštećenja kritičnih konstrukcijskih detalja) provođenjem direktnih proračuna valnog opterećenja i čvrstoće. Osim toga, prirodne frekvencije tako elastičnih brodova (što nije posljedica isključivo povećanja njihove duljine, već i optimiziranja konstrukcija i primjene novih materijala), koji plove relativno visokim brzinama (približno 25 čvorova), približavaju se frekvencijama na kojima morski valovi već posjeduju energiju dostatnu za pobuđivanje vibracija.

Stoga takve brodove više nije moguće analizirati klasičnim pristupom po kojem se najprije, primjenom neke od teorija pomorstvenosti, određuje odziv broda (kao krutog tijela) na nemirnom moru, da bi se potom, prenošenjem tlakova i ubrzanja na (elastični) strukturni model, provjeravala čvrstoća konstrukcije. Budući da se više ne može zanemariti međudjelovanje fluida i konstrukcije, nužno je provođenje hidroelastične analize.

Problem odziva broda u vertikalnoj ravnini uspješno je riješen i od sredine sedamdesetih godina, kad su Bishop i Price udarili temelje teoriji hidroelastičnosti, veliki je broj hidroelastičnih modela, dobivenih sprežanjem različitih strukturnih i hidrodinamičkih modela, uspješno primijenjen kod najrazličitijih vrsta brodova.

Situacija s brodovima kod kojih, zbog širokih otvora na palubi, najniži prirodni oblici pripadaju spregnutim horizontalnim i torzijskim vibracijama, nije tako dobra. Ova je disertacija jedan od prvih pokušaja davanja doprinosa na tom području.

SAŽETAK

Znatan porast broja sve većih kontejnerskih brodova u službi širom svijeta skrenuo je pozornost stručne javnosti na potrebu za pouzdanim alatom za određivanje hidroelastičnog odziva takvih brodova.

U prvom se poglavlju opisuje političko-ekonomska pozadina koja je do toga dovela, a govori se i o povijesnom razvoju kontejnerskih brodova. Slijedi kraći pregled literature iz područja hidroelastičnosti iz kojeg je vidljiv golemi nesrazmjer – dok je odziv broda u vertikalnoj ravnini jako dobro obrađen, rijetki su radovi koji se, na relevantnom svjetskom jeziku (budući da se poznavanje kineskog jezika još nije uvrijedilo), bave spregnutim horizontalnim savijanjem i uvijanjem kontejnerskih brodova na valovima.

Drugo poglavlje donosi teorijske osnove izrade (dijela) računalnog programa DYANA za proračun suhih prirodnih oblika spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija. Za dijelove trupa otvorenog presjeka koriste se gredni konačni elementi s osam stupnjeva slobode koji obuhvaćaju savijanje, smicanje, uvijanje i vitoperenje poprečnog presjeka. Jednostavniji elementi sa šest stupnjeva slobode, namijenjeni su dijelovima broda zatvorenog poprečnog presjeka sa zanemarenim vitoperenjem. Posebna se pažnja posvećuje prelaznim elementima koji u globalnom modelu povezuju različite vrste elemenata.

Hidrodinamički dio problema rješava inačica Bureau Veritasovog HYDROSTAR-a. U trećem poglavlju opisuje se linearna teorija potencijalnog strujanja, kao i 3D metoda integralnih jednadžbi koju taj softver koristi za rješavanje radijacijsko-difrakcijskog problema rubnih vrijednosti. Izdvaja se učinak brzine napredovanja koji dodatno komplicira problem te se ukratko opisuje metoda susretne frekvencije na kojoj se temelji HYDROSTAR.

Sprezanje 1D strukturnog i 3D hidrodinamičkog modela obrađuje se u četvrtom poglavlju, zajedno s metodom superponiranja prirodnih oblika vibriranja koja to omogućuje.

U petom se poglavlju izlaže metodologija hidroelastične analize, s naglaskom na planove i smjernice za praktičnu primjenu.

Valjanost razvijene metode potvrđena je numeričkim primjerima u šestom poglavlju. Suhi prirodni oblici prizmatičnog modela uspoređeni su s analitičkim rješenjem diferencijalnih jednadžbi spregnutih vibracija, dok je odziv elastične barže na pravilnim valovima provjeren na rezultatima objavljenih modelskih ispitivanja.

Na kraju je istaknut znanstveni doprinos provedenog istraživanja, a dane su i smjernice za daljnja istraživanja u okviru odobrenog znanstvenog projekta.

SUMMARY

Hydroelastic model of container ships dynamic response in waves

Significant growth of ever bigger container ships number in service worldwide have drawn experts' attention to the need for reliable hydrodynamic response analysis tool of such ships.

In the first chapter, political-economic background which had led to such a process is described, and historical development of container ships is presented. After that, a short literature survey on hydroelasticity is given. A huge disproportion is clearly visible – while ship response in vertical plane is investigated quite well, one can rarely stumble upon an article, in relevant language (since knowledge of Chinese language(s) haven't become common, yet), that deals with coupled horizontal bending and torsion of container ships in waves.

Second chapter brings theoretical background for writing (part) of computer program, DYANA, for dry natural modes of coupled horizontal and torsional vibration calculation. Eight-degrees-of-freedom beam finite elements, that account for bending, shear, torsion and cross-section warping, are used for open cross-section hull structure modeling. Simpler, six-degrees-of-freedom elements are chosen for closed cross-section parts with neglected warping. Transitional elements that connect those two types of finite elements in a global model, are given special attention.

A version of Bureau Veritas' HYDROSTAR solves hydrodynamic part of the problem. In chapter three, linear potential flow theory, as well as 3D boundary integral equation method, used by the program to solve radiation-diffraction boundary value problem, are presented. Effect of forward speed, that further complicates the problem, is pointed out. Encounter frequency method, used in HYDROSTAR, is shortly described.

Coupling of 1D structural and 3D hydrodynamic models, together with modal superposition method on which it is based, are dealt with in chapter four.

In fifth chapter, methodology of hydroelastic analysis is given and plans for practical use are presented.

Reliability of the developed method is validated by numerical examples in chapter six. Prismatic model dry natural modes are compared to analytical solution of coupled vibration differential equations. Elastic barge response in harmonic waves is checked versus model experiments results taken from literature.

At the end, scientific contribution of the conducted investigation is pointed out, and guidelines for future work are given.

KLJUČNE RIJEČI

- kontejnerski brodovi
- hidroelastičnost
- valno opterećenje
- dinamički odziv
- pruženje
- podrhtavanje
- spregnute horizontalne i torzijske vibracije
- metoda konačnih elemenata
- teorija linearnog potencijalnog strujanja
- 1D strukturni model
- 3D hidrodinamički model
- frekvencijsko područje
- vremensko područje
- metoda superponiranja prirodnih oblika vibriranja

KEY WORDS

- container ships
- hydroelasticity
- wave excitation
- dynamic response
- springing
- whipping
- coupled horizontal and torsional vibration
- finite element method
- linear potential flow theory
- 1D structural model
- 3D hydrodynamic model
- frequency domain
- time domain
- modal superposition method

POPIS OZNAKA

A	- površina poprečnog presjeka, m^2
A_{ij}	- element matrice koeficijenata dodatne mase
B_{ij}	- element matrice koeficijenata prigušenja
c	- brzina napredovanja vala, m/s
C_{ij}	- element matrice koeficijenata povratne sile
d	- dubina mora, m
D_i	- element vektora pomaka u čvorovima globalnog modela konačnih elemenata
E	- Youngov modul elastičnosti, N/m^2
E_{tot}	- ukupna energija konačnog elementa, J
F^{hd}	- hidrostatička sila na tijelo
F^{hs}	- hidrodinamička sila na tijelo
F_i	- element vektora sila u čvorovima globalnog modela konačnih elemenata
f_i	- element vektora čvornih sila
F_x	- faktor krutosti poprečnog presjeka na smicanje, m^2
G	- modul smika, N/m^2
g	- ubrzanje Zemljine sile teže, m/s^2
\vec{H}	- vektor pomaka točke
\tilde{h}^j	- kompleksna amplituda j -tog prirodnog oblika vibriranja
h	- visina vala, m
I_{tx}	- faktor krutosti poprečnog presjeka na uvijanje, m^4
I_{wx}	- faktor krutosti poprečnog presjeka na vitoperenje, m^6
I_x	- moment tromosti poprečnog presjeka, m^4
J_{bx}	- moment tromosti mase broda (po jedinici duljine), kgm^2/m
J_{mx}	- polarni moment tromosti mase (po jedinici duljine) s obzirom na težište, kgm^2/m
J_{mx}^*	- polarni moment tromosti mase (po jedinici duljine) s obzirom na centar torzije, kgm^2/m
k	- valni broj, $1/m$
K_{ij}^*	- element generalizirane matrice krutosti globalnog modela konačnih elemenata
k_{ij}	- element modalne matrice krutosti
M	- moment savijanja, Nm
m_{ij}	- element modalne matrice masa
M_t	- moment uvijanja, Nm
M_t^0	- moment čistog uvijanja, Nm

M_t^*	- moment uvijanja uslijed ograničenosti vitoperenja poprečnog presjeka, Nm
m_x	- distribuirana masa, kg/m
N	- broj elastičnih prirodnih oblika vibriranja
\vec{n}	- vektor normale na oplakanu površinu
p	- tlak, N/m ²
p_0	- atmosferski tlak, N/m ²
p_d	- hidrodinamički tlak, N/m ²
p_{ij}	- element modalne matrice (strukturnog i viskoznog) prigušenja
p_s	- hidrostatski tlak, N/m ²
Q	- smična sila, N
q_i	- element vektora vanjskog čvornog opterećenja
q_u	- ukupno distribuirano opterećenje poprečnom silom, N/m
q_x	- vanjsko distribuirano opterećenje poprečnom silom, N/m
\vec{R}	- vektor položaja točke oplakane površine u mirovanju
\vec{r}	- vektor položaja točke oplakane površine
S_B	- oplakana površina trupa, m ²
T	- bimoment, Nm ²
t	- vrijeme, s
\vec{U}	- vektor brzine broda
U	- ukupna energija unutarnjih sila, J
u	- uzdužni pomak, m
U_i	- čvorni pomak savijanja
V	- volumen fluida, m ³
V_i	- čvorni pomak uvijanja
v	- progib smicanja, m
\vec{v}	- vektor brzine čestice fluida
W	- rad vanjskog opterećenja, J
w	- progib savijanja, m
\vec{w}	- vektor brzine čestice fluida zbog stacionarnog napredovanja broda
x_1	- apscisa
x_2	- ordinata
x_3	- aplikata
y	- ukupni progib, m
y^h	- ukupni progib horizontalnog savijanja, m
y^v	- ukupni progib vertikalnog savijanja, m

z_D	- vertikalni položaj centra torzije konačnog elementa, m
z_G	- vertikalni položaj težišta sustava, m
z_{NL}	- vertikalni položaj neutralne linije vertikalnog savijanja, m
z_x	- udaljenost središta masa od centra uvijanja, m
β	- susretni kut, rad
δ_i	- element vektora čvornih pomaka
ε	- nagib vala
ζ	- izdizanje morske površine, m
ϑ	- prirast kuta uvijanja, rad/m
λ	- duljina vala, m
μ_{tu}	- ukupno distribuirano opterećenje momentom uvijanja, Nm/m
μ_{tx}	- vanjsko distribuirano opterećenje momentom uvijanja, Nm/m
μ_u	- ukupno distribuirano opterećenje momentom savijanja, Nm/m
μ_x	- vanjsko distribuirano opterećenje momentom savijanja, Nm/m
Π	- ukupna energija mehaničkog sustava, J
ρ	- gustoća fluida, kg/m ³
Φ	- potencijal brzine strujanja fluida
Φ_D	- potencijala brzine difrakcijskog vala
Φ_I	- potencijala brzine nailaznog vala
Φ_R	- potencijala brzine radijacijskog vala
φ	- kut zakreta poprečnog presjeka trupa, rad
φ^h	- kut zakreta poprečnog presjeka trupa kod horizontalnog savijanja, rad
φ^v	- kut zakreta poprečnog presjeka trupa kod vertikalnog savijanja, rad
ψ	- kut uvijanja, rad
$\tilde{\xi}_j$	- kompleksna amplituda j-tog prirodnog oblika vibriranja
$\vec{\omega}$	- vektor vrtloženja
ω	- kružna frekvencija vala, rad/s
ω_e	- susretna frekvencija, rad/s

POPIS SLIKA

Slika 1.1	<i>Udjel proizvoda prevoženih brodom u sklopu just-in-time proizvodnje</i>	1
Slika 1.2	<i>Rast BDP-a Singapura podudara se s porastom kontejnerskog prometa u singapurskoj luci</i>	2
Slika 1.3	<i>Međunarodna trgovina a) 1998. godine; b) 2003. godine</i>	3
Slika 1.4	<i>Omjer kontejneriziranog i ostalog općeg tereta</i>	3
Slika 1.5	<i>Indeks rasta trgovine morem i prijevoza kontejnerima</i>	4
Slika 1.6	<i>Maksimalna veličina i generacije kontejnerskih brodova</i>	5
Slika 1.7	<i>Udjel brodova različite veličine u ukupnom kapacitetu svjetske flote</i>	6
Slika 1.8	<i>Ekonomičnost veličinom</i>	7
Slika 1.9	<i>Veličina izgrađenih post-panamax brodova</i>	7
Slika 1.10	<i>Udjel 20 najvećih brodarskih kompanija u floti kontejnerskih brodova</i>	8
Slika 1.11	<i>Rast potražnje za kontejnerskim brodovima</i>	9
Slika 1.12	<i>Rast kineskog izvoza</i>	10
Slika 2.1	<i>Spregnutost uzdužnih vibracija s vertikalnim</i>	16
Slika 2.2	<i>Sprega horizontalnih i torzijskih vibracija</i>	17
Slika 2.3	<i>Euler – Bernoullijeva greda</i>	18
Slika 2.4	<i>Timošenkova greda</i>	20
Slika 2.5	<i>Gredni model zatvorenog poprečnog presjeka</i>	23
Slika 2.6	<i>Gredni model trupa otvorenog presjeka</i>	24
Slika 2.7	<i>Gredni konačni element s osam stupnjeva slobode</i>	39
Slika 2.8	<i>Funkcije oblika grednoga konačnog elementa trupa</i>	42
Slika 2.9	<i>Gredni konačni element sa šest stupnjeva slobode</i>	49
Slika 2.10	<i>Uvjeti ravnoteže sila i kompatibilnosti pomaka na spojevima</i>	55
Slika 2.11	<i>Generalizirana matrica krutosti globalnog modela</i>	55
Slika 2.12	<i>Prelaz s konačnog elementa zatvorenog na element otvorenog presjeka</i>	56
Slika 2.13	<i>Prelaz s konačnog elementa otvorenog na element zatvorenog presjeka</i>	58
Slika 3.1	<i>Tenzor naprezanja na elementarnom volumenu</i>	60
Slika 3.2	<i>Harmonijski progresivni val</i>	68
Slika 3.3	<i>Putanje čestica vala</i>	73
Slika 3.4	<i>Profili vala i kinematičko-dinamičke značajke dobivene linearnom teorijom</i>	73
Slika 3.5	<i>Njihanje krutog tijela na valovima</i>	75
Slika 3.6	<i>Koordinatni sustavi</i>	77
Slika 3.7	<i>Definicija susretnih kutova</i>	79

Slika 3.8	<i>Komponente hidrodinamičkih sila na tijelo</i>	82
Slika 3.9	<i>Linearna teorija difrakcije</i>	83
Slika 3.10	<i>Varijacija vektora normale</i>	90
Slika 3.11	<i>Površine integracije za Greenov teorem za a) sferu i b) polusferu</i>	108
Slika 3.12	<i>Rubne površine</i>	109
Slika 3.13	<i>Hidrodinamički model oplakane površine broda</i>	110
Slika 4.1	<i>Koordinatni sustavi strukturnog i hidrodinamičkog modela</i>	113
Slika 5.1	<i>Metodologija hidroelastične analize</i>	121
Slika 5.2	<i>Programski paket Bureau Veritasa za određivanje hidroelastičnog odziva</i>	122
Slika 6.1	<i>Glavno rebro kontejnerskog broda nosivosti 8200 TEU</i>	125
Slika 6.2	<i>Razmještaj kontejnera na paralelnom srednjaku</i>	126
Slika 6.3	<i>Analitičko i numeričko rješenje za prvi prirodni oblik</i>	127
Slika 6.4	<i>Analitičko i numeričko rješenje za drugi prirodni oblik</i>	128
Slika 6.5	<i>Analitičko i numeričko rješenje za treći prirodni oblik</i>	129
Slika 6.6	<i>Analitičko i numeričko rješenje za četvrti prirodni oblik</i>	129
Slika 6.7	<i>Presječne sile savijanja za prvi prirodni oblik</i>	130
Slika 6.8	<i>Presječne sile uvijanja za prvi prirodni oblik</i>	130
Slika 6.9	<i>Presječne sile savijanja za drugi prirodni oblik</i>	131
Slika 6.10	<i>Presječne sile uvijanja za drugi prirodni oblik</i>	131
Slika 6.11	<i>Presječne sile savijanja za treći prirodni oblik</i>	132
Slika 6.12	<i>Presječne sile uvijanja za treći prirodni oblik</i>	132
Slika 6.13	<i>Presječne sile savijanja za četvrti prirodni oblik</i>	133
Slika 6.14	<i>Presječne sile uvijanja za četvrti prirodni oblik</i>	133
Slika 6.15	<i>Segmentirana elastična barža na valovima</i>	134
Slika 6.16	<i>Segmentirana elastična barža</i>	135
Slika 6.17	<i>Geometrija pramčanog pontona</i>	135
Slika 6.18	<i>Referentne točke</i>	136
Slika 6.19	<i>Apsolutne vrijednosti amplituda normiranih modova vertikalnog odziva</i>	137
Slika 6.20	<i>Apsolutne vrijednosti amplituda normiranih modova spregnutog horizontalnog i torzijskog odziva</i>	137
Slika 6.21	<i>Prvi prirodni oblik vertikalnih vibracija barže, $\omega_1 = 5.21 \text{ rad/s}$</i>	138
Slika 6.22	<i>Drugi prirodni oblik vertikalnih vibracija barže, $\omega_2 = 12.37 \text{ rad/s}$</i>	138
Slika 6.23	<i>Prvi prirodni oblik spregnutih vibracija barže, $\omega_1 = 5.32 \text{ rad/s}$</i>	139
Slika 6.24	<i>Drugi prirodni oblik spregnutih vibracija barže, $\omega_2 = 7.92 \text{ rad/s}$</i>	139
Slika 6.25	<i>Prenosne funkcije poniranja u šest referentnih točaka</i>	140

Slika 6.26	<i>Prenosne funkcije posrtanja u šest referentnih točaka</i>	141
Slika 6.27	<i>Prenosna funkcija poniranja barže</i>	141
Slika 6.28	<i>Prenosna funkcija posrtanja barže</i>	142
Slika 6.29	<i>Prenosna funkcija vertikalnog savijanja barže</i>	142
Slika 6.30	<i>Prenosne funkcije ljuľanja u šest referentnih točaka</i>	143
Slika 6.31	<i>Prenosna funkcija ljuľanja barže</i>	143
Slika 6.32	<i>Prenosna funkcija horizontalnog savijanja barže</i>	144
Slika 6.33	<i>Prenosna funkcija uvijanja barže</i>	144
Slika 6.34	<i>Numeričko simuliranje početnih deformacija elastične barže</i>	146
Slika 6.35	<i>Vertikalni pomaci referentnih točaka u vremenu</i>	146
Slika 6.36	<i>Opći plan broda</i>	148
Slika 6.37	<i>Geometrijske značajke poprečnih presjeka duž kontejnerskog broda</i>	149
Slika 6.38	<i>Inercijske značajke konačnih elemenata za potpuno nakrcan brod</i>	150
Slika 6.39	<i>Inercijske značajke konačnih elemenata za brod u balastu</i>	151
Slika 6.40	<i>Prvi suhi prirodni oblik vertikalnih vibracija, $\omega_1 = 4.01 \text{ rad/s}$</i>	152
Slika 6.41	<i>Drugi suhi prirodni oblik vertikalnih vibracija, $\omega_2 = 8.43 \text{ rad/s}$</i>	152
Slika 6.42	<i>Prvi suhi prirodni oblik spregnutih vibracija, $\omega_1 = 2.32 \text{ rad/s}$</i>	153
Slika 6.43	<i>Drugi suhi prirodni oblik spregnutih vibracija, $\omega_2 = 4.38 \text{ rad/s}$</i>	153
Slika 6.44	<i>Prenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja po sredini potpuno nakrcanog broda, $x = 161.35 \text{ m}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$</i>	154
Slika 6.45	<i>Prenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja po sredini broda u balastu, $x = 168.57 \text{ m}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$</i>	154
Slika 6.46	<i>Vertikalni moment savijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$</i>	155
Slika 6.47	<i>Vertikalna smična sila za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$</i>	155
Slika 6.48	<i>Vertikalni moment savijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.35 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$</i>	156
Slika 6.49	<i>Vertikalna smična sila za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.35 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$</i>	156
Slika 6.50	<i>Vertikalni moment savijanja za brod u balastu, $\omega = 0.45 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$</i>	157
Slika 6.51	<i>Vertikalna smična sila za brod u balastu, $\omega = 0.45 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$</i>	157

Slika 6.52	Vertikalni moment savijanja za brod u balastu, $\omega = 1.45 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	158
Slika 6.53	Vertikalna smična sila za brod u balastu, $\omega = 1.45 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	158
Slika 6.54	Prenosne funkcije horizontalnog momenta savijanja po sredini potpuno nakrcanog broda, $x = 168.57 \text{ m}$, $\beta = 120^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	159
Slika 6.55	Prenosne funkcije momenta uvijanja po sredini potpuno nakrcanog broda, $x = 168.57 \text{ m}$, $\beta = 120^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	159
Slika 6.56	Horizontalni moment savijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	160
Slika 6.57	Horizontalni moment savijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.15 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	160
Slika 6.58	Horizontalna smična sila za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	161
Slika 6.59	Horizontalna smična sila za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.15 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	161
Slika 6.60	Moment uvijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.85 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	162
Slika 6.61	Moment uvijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.15 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$	162
Slika B.1	Pojednostavljeni dijagram toka programa DYANA	182
Slika B.2	Pojednostavljeni dijagram toka programa MECAP	183
Slika B.3	Pojednostavljeni dijagram toka programa TDP	184

POPIS TABLICA

Tablica 3.1	<i>Izrazi linearne teorije valova</i>	75
Tablica 6.1	<i>Prirodne frekvencije spregnutih vibracija</i>	128
Tablica 6.2	<i>Glavne izmjere kontejnerskog broda nosivosti 8200 TEU</i>	147

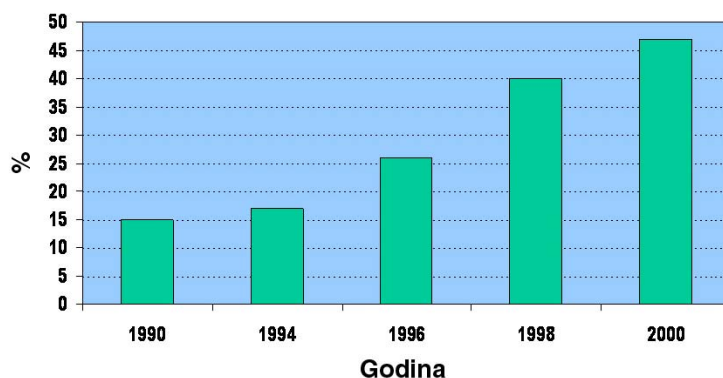
1. UVOD

1.1. Razvoj kontejnerskih brodova

Vjerojatno najistaknutije obilježje čovječanstva njegov je neprekinuti, prvenstveno tehnološki, razvoj. Unatoč brojnim svjetskim kriznim žarištima, može se reći da, nakon izuzetno turbulentnog (većeg dijela) dvadesetog stoljeća, u posljednjih petnaestak godina (od prestanka hladnog rata i blokofske podjele svijeta) svjedočimo i relativno povoljnom političkom razdoblju koje je srušilo (neke) prepreke slobodnijem protoku informacija, kapitala, roba i ljudi.

Kombinacija povoljnog trenutka u svjetskoj politici koji je doveo do liberalizacije ekonomskih odnosa i (postupnog) otvaranja (gotovo) svih svjetskih gospodarstava; i tehnološkog napretka (prvenstveno se to odnosi na informacijske, komunikacijske i transportne tehnologije), iz temelja je izmijenila svjetsku ekonomiju i rezultirala nezaustavljivim (ali i kontroverznim) procesom globalizacije – *prostornim raspršivanjem proizvodnje i potrošnje ekonomskih roba* [1].

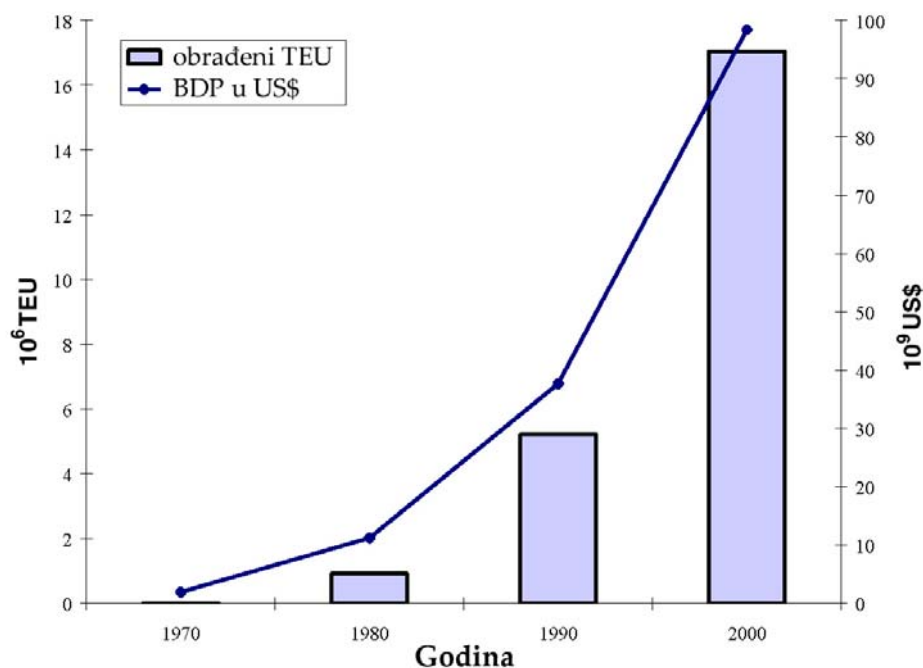
Mogućnost primjene *just-in-time* proizvodne filozofije na globalnoj razini nije promakla najvećim svjetskim kompanijama koje su shvatile da se povećanje zarade može ostvariti racionalizacijom proizvodnje i selidbom (dijelova) proizvodnih pogona u zemlje jeftinije radne snage.



Slika 1.1 Udjel proizvoda prevoženih brodom u sklopu *just-in-time* proizvodnje [2]

Slika 1.1 odlično ilustrira razmjor takvih procesa, kao i ključnu ulogu koju industrija transporta robe kontejnerima (ili, općenitije, industrija pomorskog transporta) ima u osiguravanju pouzdanih i pravovremenih tokova sirovina, poluproizvoda i gotovih proizvoda.

Osim toga, prijevoz kontejnerima pospješio je proces globalizacije i smanjenjem troškova transporta, s 5-10% na 1-1.5% ukupne cijene koju plaća krajnji korisnik [3]. Tako je, na primjer, prijevoz 15500 boca škotskog viskija iz Velike Britanije do Japana 1991. godine stajao 1560, a 2001. godine samo 675 američkih dolara [4]. To su osobito dobro iskoristila gospodarstva zemalja jugoistočne Azije – uzlet *azijskih tigrova* podudara se s procvatom kontejnerizacije, slika 1.2.

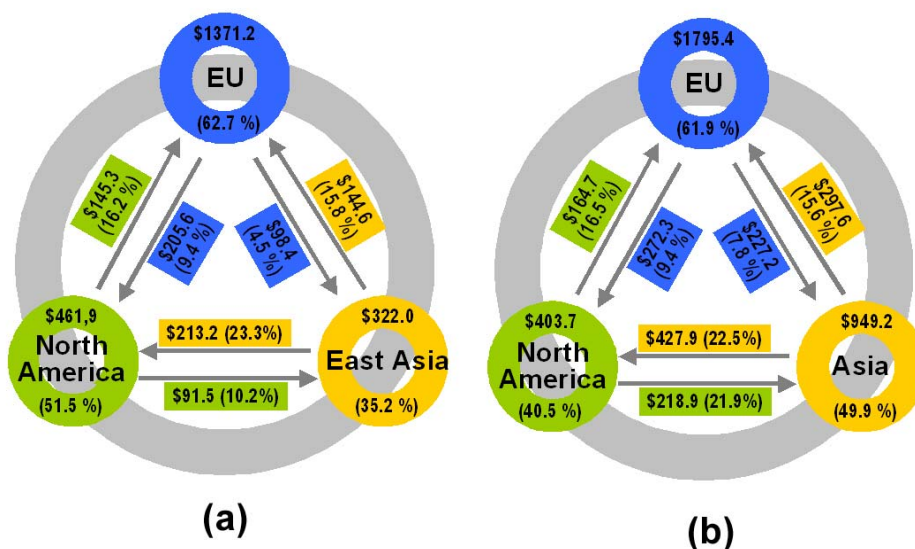


Slika 1.2 Rast BDP-a Singapura podudara se s porastom kontejnerskog prometa u singapurskoj luci [5]

U takvim okolnostima, međunarodna trgovina, koja ionako stalno raste zbog porasta broja i prosječnog životnog standarda svjetskog stanovništva, dobiva poticaj za još snažnijim, gotovo spektakularnim, rastom, slika 1.3.

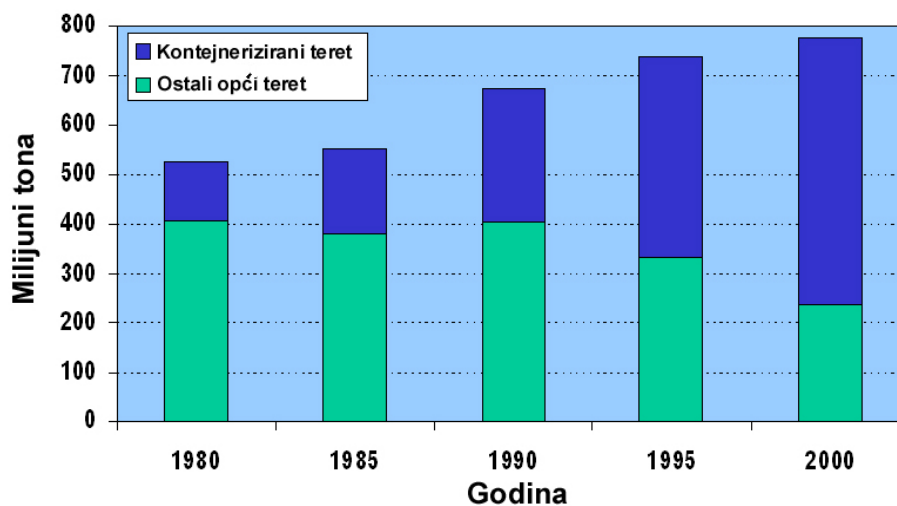
Taj je rast naročito impresivan na glavnim svjetskim pomorskim trgovačkim putovima – onom koji povezuje Evropu s istočnom Azijom, transpacifičkom između istočne Azije i zapadne obale SAD-a te transatlantskom koji istočnu obalu SAD-a spaja s Evropom.

Kako bi zadovoljila povećanu potražnju za transportom, jednako snažno raste i svjetska trgovačka flota, a osobito je dramatičan porast kako broja, tako i veličine kontejnerskih brodova. U samo šest godina krajem prošlog desetljeća, udjel kontejnerskih brodova u ukupnoj tonaži svjetske flote povećao se s 5% na 11% [6].



Slika 1.3 Međunarodna trgovina a) 1998. godine; b) 2003. godine [2]

Razlog tome može se potražiti u višestrukim izvorima rasta volumena kontejnerskog prometa. Ne samo da potražnja za takvim načinom transporta raste zbog porasta svjetskog gospodarstva (i to po dvostrukoj stopi, po kojoj raste međunarodna trgovina), već se i sve više općeg tereta kontejnerizira, slika 1.4, zbog brojnih prednosti (jednostavnost, brzina, sigurnost, ekonomičnost, usklađenost s drugim oblicima transporta kopnom) u odnosu na klasičan način prijevoza općih tereta morem.

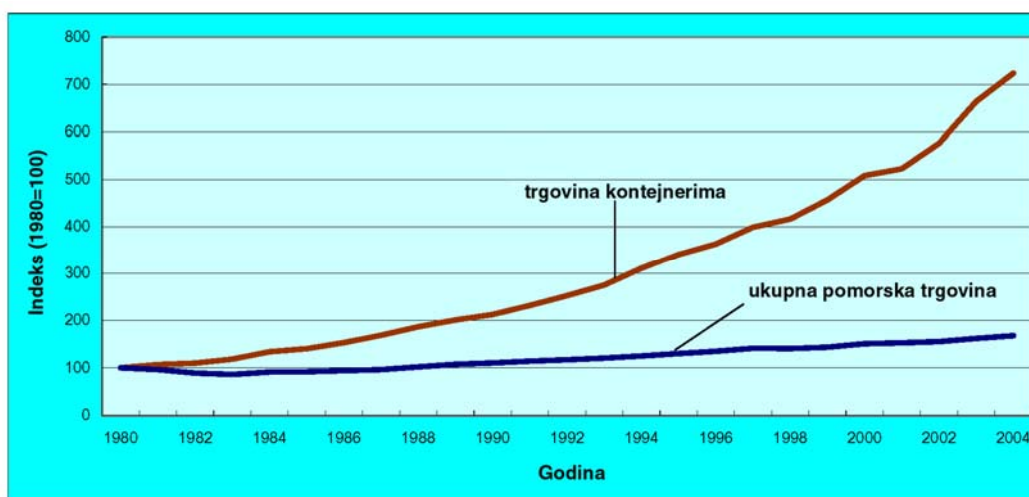


Slika 1.4 Omjer kontejneriziranog i ostalog općeg tereta [2]

Kontejnerski brodovi, gusto razdijeljeni nepropusnim poprečnim pregradama, izuzetno su sigurni i vrlo je malo, isključujući sudare, njihovih teških nesreća. Dva najteža stradanja uslijed lošeg vremena odnose se na *CV MSC Carla* koja se 1998. godine prepolovila (pri čemu su obje polovice ostale plutati) i *CV APL China* koja je teško oštećena 1999. godine [7,8].

Uz već navedene razloge za porastom potražnje, uvođenjem sve većih kontejnerskih brodova koji, iz ekonomskih razloga, smanjuju broj uplovljavanja u luke, raste i potreba za razvoženjem tereta manjim kontejnerskim brodovima od najvećih svjetskih kontejnerskih terminala do konačnih odredišta.

Od početka 1970-ih godina traje rast potražnje za kontejnerskim transportom po stopama od skoro 10% godišnje, slika 1.5, tako da danas svijetom putuje 16 milijuna kontejnera [9], prenoseći sve – od mikročipova, do starog papira.

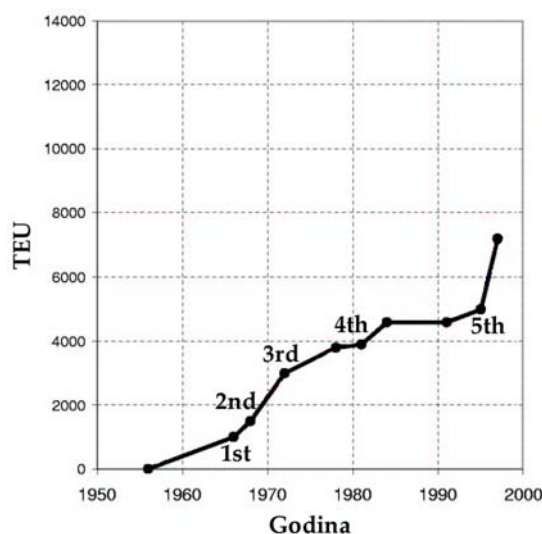


Slika 1.5 Indeks rasta trgovine morem i prijevoza kontejnerima [10]

Kontejnerizacija započinje ne tako davne 1956. godine. Amerikanac Malcolm Mc Lean, vlasnik prevoznice tvrtke *Sea-Land*, koncept kontejnera osmislio je još 1937. godine [9], ali tek uvođenjem standardiziranog (za prijevoz brodom, željeznicom i kamionom) kontejnera dimenzija 20 x 8 x 8.5 stopa (kapaciteta 1 TEU, engl. *twenty feet equivalent unit*; što je približno 39 m³) počinje njihova šira primjena. Utjecaj njegove revolucionarne inovacije na svjetsko gospodarstvo ponekad se uspoređuje s onim mikročipa [6] – Lloydov popis na kraju 1999. godine proglasio je izumitelja kontejnera jednim od trojice najvažnijih ljudi dvadesetog stoljeća.

Kontejnere su u početku prevozili za to prenamijenjeni tankeri i brodovi za prijevoz rasutih tereta. Na prvu plovidbu, 26. travnja 1956. godine, iz Newarka prema Houstonu krenuo je *Ideal X*, konvertirani T2 tanker iz drugog svjetskog rata, natovaren s 58 kontejnera [8, 11, 12]. Do prve plovidbe preko Atlantika prošlo je još deset godina – 1966. godine iz SAD-a u Evropu zaplovio je brod *Fairland*, kapaciteta 266 TEU.

Negdje u to vrijeme, 1964. godine, naručeni su i prvi *pravi* kontejnerski brodovi s velikim grotlenim otvorima za olakšani pretovar kontejnera smještenih u skladišta [8, 13]. Prva faza kontejnerizacije rezultat je tehnološke inovativnosti, a obilježio ju je, u pravilnim koracima, snažan rast (prosječne) veličine brodova. Obično se, za tu fazu, navode četiri generacije kontejnerskih brodova koje su obuhvaćale važne razvojne cikluse na tržištu, slika 1.6.

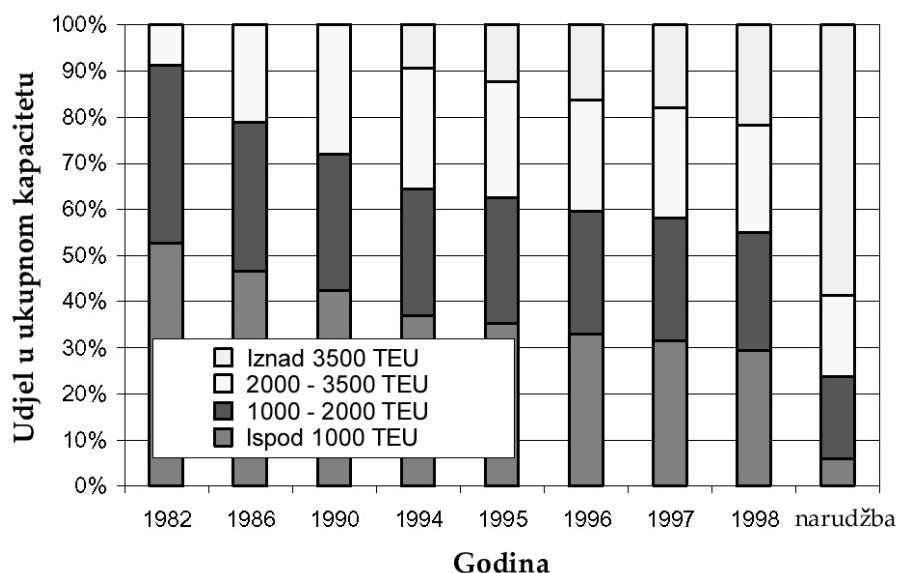


Slika 1.6 Maksimalna veličina i generacije kontejnerskih brodova [11]

Prva generacija odlikovala se nosivošću do 1000 TEU, dok su brodovi druge generacije, koji su se pojavili 1967. godine, podigli nosivost do 1600 TEU [8, 13]. Početkom sedamdesetih godina prošlog stoljeća dimenzije (treće generacije) kontejnerskih brodova narasle su do ograničenja uvjetovanih mogućnošću prolaska kroz Panamski kanal (širina od 32.3 m, gaz od 12 m), što je rezultiralo nosivošću od 3000 TEU.

Zahtjev za daljnjim povećanjem nosivosti, uz zadržavanje panamax dimenzija (širine i gaza), brodograđevni su inženjeri riješili neproporcionalnim povećavanjem duljine broda. Kontejnerske brodove četvrte generacije, uz maksimalnu nosivost (dostignutu 1984. godine porastom duljine do, za Panamski kanal, graničnih 290 m) od 4500 TEU [13], karakteriziralo je i nešto slabije ponašanje u službi (zbog lošijih hidrodinamičkih značajki neproporcionalnih brodova).

Sredinom 80-ih godina dvadesetog stoljeća nastupila je druga faza kontejnerizacije, u kojoj je naglasak s tehnološkog napretka prebačen na reorganizaciju prevoznčkih kompanija [13]. Proširuje se dotadašnji koncept prijevoza robe od luke do luke i uvodi usluga dostave od pošiljatelja do primatelja (engl. *door-to-door*). Za to se vrijeme nije mijenjala maksimalna nosivost kontejnerskih brodova, iako se, rastom udjela većih brodova, postupno povećavala njihova prosječna veličina, slika 1.7.

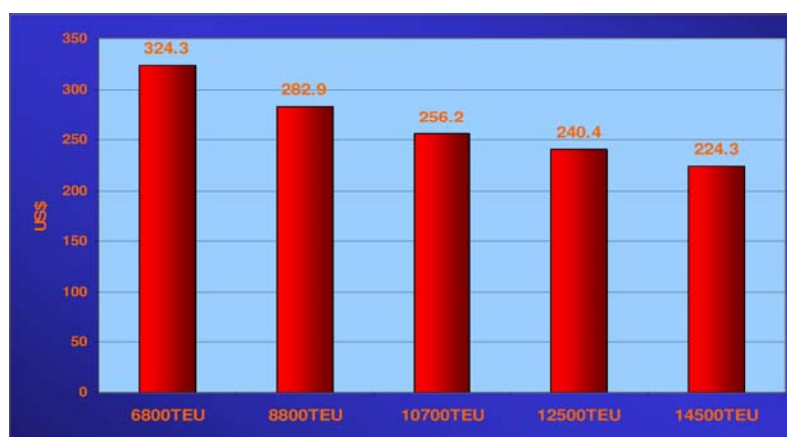


Slika 1.7 Udjel brodova različite veličine u ukupnom kapacitetu svjetske flote [13]

Širenje prakse globalnog poslovanja po *just-in-time* filozofiji međusobno se poticalo [4, 13] s paralelnom pojavom raznonačinskih lanaca distribucije roba (engl. *intermodal distribution chains; intermodalism*).

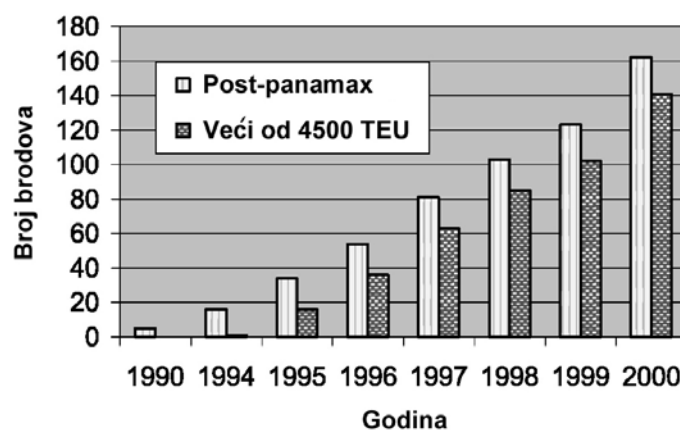
U istom se razdoblju dogodio i novi značajni korak u razvoju kontejnerskih brodova. Revolucionarna ideja odbacivanja panamax graničnih dimenzija rezultirala je pojavom post-panamax brodova. Prve takve brodove (C10 klase), njemačko je brodogradilište HDW, u klasi ABS-a, izgradilo 1988. godine za američkog prevoznika APL (*American President Lines*) [12, 14]. Bilo je potrebno nekoliko godina da industrija pomorskog prijevoza prihvati novotariju – prvi sljedeći post-panamax brod, Nedlloydova *Normandie*, zaplovila je tek 1991. godine.

1995. godine dolazi do novog zaokreta, nakon kojeg tehnološki napredak ponovno počinje diktirati razvoj industrije kontejnerskog transporta (što će vjerojatno biti prepoznato trećom fazom kontejnerizacije). Poklapanje više preduvjeta dovelo je do pojave sve većih post-panamax brodova pete generacije. Planirajući obnavljanje flote, najveće svjetske brodarske kompanije povjerovala su optimističnim očekivanjima daljnjeg značajnog rasta međunarodne trgovine (a time i potražnje za prijevozom robe kontejnerima) i donijele stratešku odluku o povećanju vlastite konkurentnosti prelaskom na brodove koji će, zbog manjih jediničnih troškova po prevezenom TEU, biti ekonomični svojom veličinom (engl. *economies of scale*).



Slika 1.8 Ekonomičnost veličinom [15]

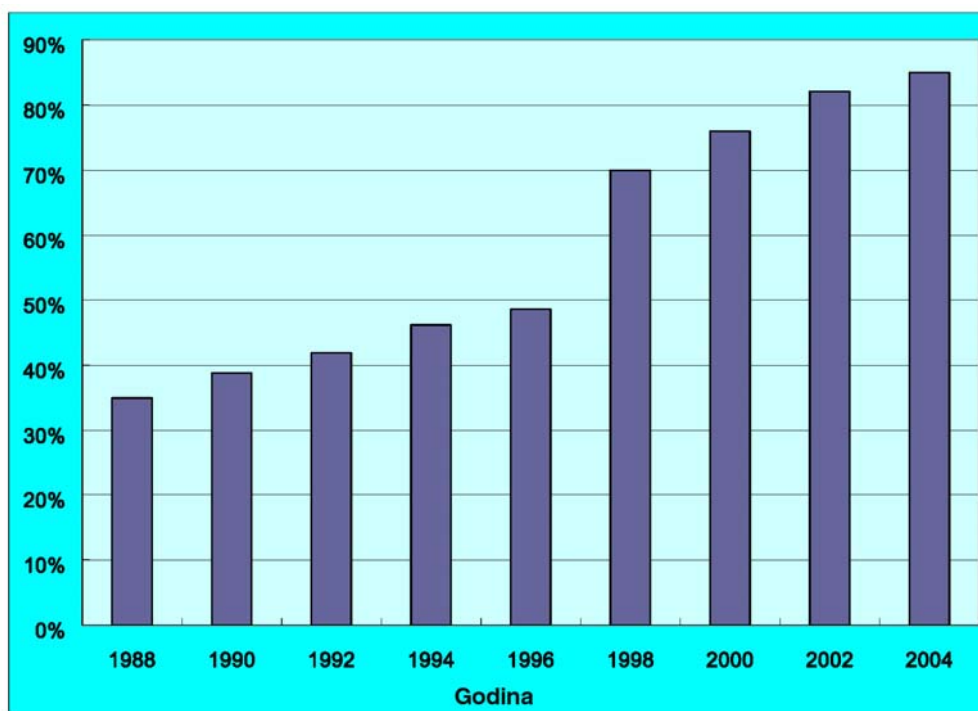
Usljedio je novi zamah, kako u maksimalnoj veličini brodova, tako i u povećanju udjela post-panamax brodova u svjetskoj kontejnerskoj floti, slika 1.9.



Slika 1.9 Veličina izgrađenih post-panamax brodova [13]

Početkom 1995. godine plovio je tek jedan post-panamax brod nosivosti iznad 4500 TEU, da bi ih krajem 2000. godine bilo više od 140 [13], a danas takvi brodovi već sačinjavaju 32% flote [9].

Uvođenje tako velikih VLCC (*Very Large Container Carrier*) brodova zahtijevalo je značajna financijska sredstva (na kraju 1999. godine, cijena novogradnje kapaciteta 6500 TEU iznosila je približno 80 milijuna dolara [13]). Najveći svjetski prevoznici odlučili su taj poslovni rizik međusobno podijeliti, tako da je u posljednjih desetak godina došlo ne samo do okrupnjavanja tvrtki (preuzimanjima ili spajanjima), već je formirano i nekoliko globalnih saveza među *velikim igračima*. Tako je krajem 1996. godine došlo do spajanja australskog *P&O Containers* s nizozemskim *Nedlloyd Lines* [17], dok je singapurski *Neptune Orient Line* (NOL) kupio američki *American President Lines* (APL) 1997. godine [1]. Spajanje danskog *Mærsk*a i američkog *Sea-Land*a 1999. godine, stvorilo je mega-kompaniju koja je u to vrijeme kontrolirala 9.2% ukupne kontejnerske flote [1], a novonastali je prevoznik 2005. godine kupio *Royal P&O Nedlloyd* i još povećao svoju snagu. Proces okrupnjavanja najbolje ilustrira podatak o povećanju udjela 20 najvećih brodarskih kompanija u ukupnom kapacitetu s 26% 1980. godine na 85% 2004. godine, slika 1.10. To pokazuje da su velike tvrtke uspjele u namjeri ovladavanja glavnim međunarodnim trgovačkim putovima (u smjeru istok-zapad) i istiskivanja manjih kompanija na sporedna tržišta.

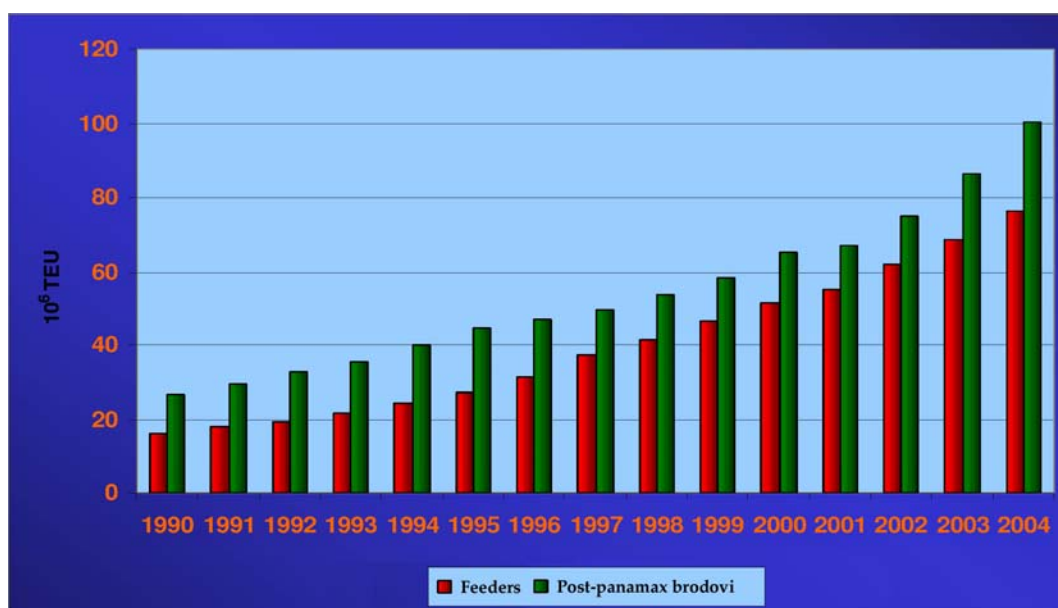


Slika 1.10 Udjel 20 najvećih brodarskih kompanija u floti kontejnerskih brodova [10]

Rast veličine kontejnerskih brodova pratio je i razvoj potrebne infrastrukture u najvećim svjetskim lukama za prihvat kontejnera – kako nabava portalnih dizalica većeg raspona (potrebnih za opsluživanje brodova veće širine), tako i jaružanje gatova i prilaznih kanala zbog povećanja dubine mora koje bi omogućilo prihvat brodova sve većeg gaza. Nizozemska je vlada, na primjer, platila jaružanje prilaznog kanala luci Rotterdam [4], kako bi osigurala nastavak njezine konkurentnosti.

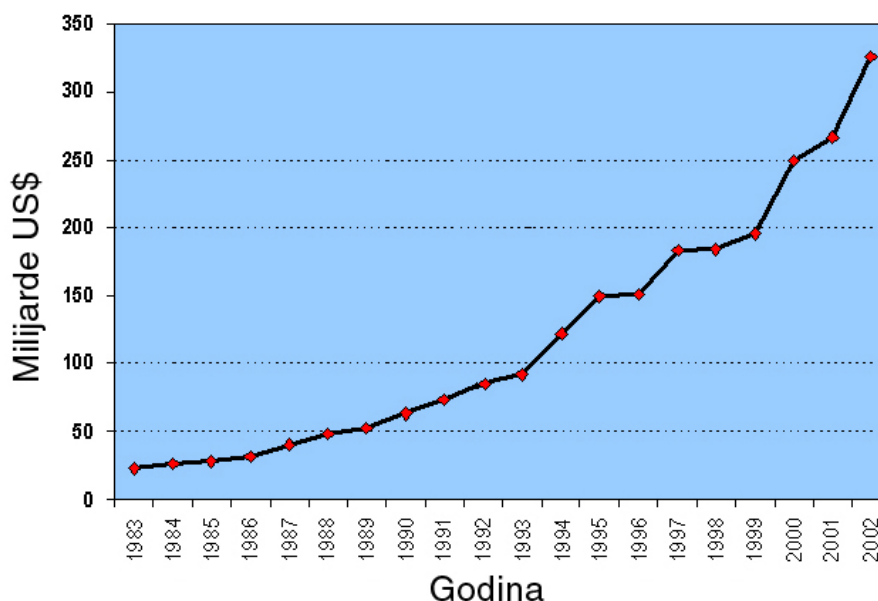
Ne samo da se luke moraju prilagođavati stalnom rastu veličine kontejnerskih brodova, već je ugovoreno i proširivanje (točnije rečeno, probijanje treće linije [18]) Panamskog kanala (do 2015. godine? [9]), kako bi se omogućio prolaz takvim brodovima, a najavljeno je i daljnje proširivanje Sueskog kanala [18].

Budući da ekonomičnost veličinom takvi brodovi postižu samo na moru, potrebno je skratiti vrijeme njihovog boravka u lukama. S jedne je strane potrebno osigurati učinkovit pretovar, a s druge smanjiti broj uplovljavanja. To je dovelo do stvaranja [3, 4] radijalnih mreža (engl. *hub-and-spoke network*) – velikih tranzitnih terminala u koje pristaju najveći kontejnerski brodovi, nakon čega niz manjih brodova razvozi (u svim smjerovima) kontejnere na njihova stvarna odredišta. Stoga ne čudi što ne raste samo potražnja za velikim post-panamax brodovima, već i ona za manjim kontejnerskim brodovima, tzv. *hranilicama* (engl. *feeders*), slika 1.11.



Slika 1.11 Rast potražnje za kontejnerskim brodovima [15]

Glavni zamašnjak ovakvom razvoju kontejnerskih brodova spektakularni je gospodarski rast Kine (kojeg prati i odgovarajuće povećanje izvoza) posljednjih godina, slika 1.12.



Slika 1.12 Rast kineskog izvoza [2]

Kineski izvoz najveći je pokretač stalne dvoznamenkaste godišnje stope rasta trgovine na dvije najveće svjetske pomorske trgovačke rute. I dok na trećem velikom trgovačkom putu, onom transatlantskom između istočne obale SAD-a i Evrope, optimalna veličina kontejnerskog broda još uvijek odgovara najvećim panamax brodovima (4500 TEU), sve veći kontejnerski brodovi isplativi su [1] na ruti između istočne Azije i Evrope (2004. godine porast prometa iznosio je 17.5% u jednom, a 5.5% u drugom smjeru), kao i na onoj između istočne Azije i zapadne obale SAD-a (15%, odnosno 5% porasta prometa).

Budući da se sljedećih godina očekuje [17] potpisivanje ugovora o slobodnoj trgovini između Kine i zemalja članica ASEAN-a (*Association of Southeast Asian Nations*), nitko ne sumnja u nastavak kineskog gospodarskog čuda. Rezultat toga pune su knjige narudžbi koje su trenutno jednake polovici kapaciteta današnje flote [9]. Druga je posljedica daljnji nastavak rasta veličine – prošle je godine u službu ušla ULCC (*Ultra Large Container Carrier*) *Emma Mærsk*, nosivosti veće od 11000 TEU [9, 12] (14500 TEU? [14]), duljine 397.7 m, širine 56.4 m i gaza 16 m, s dosad najvećim (prvim) četrnaestocilindričnim brodskim motorom snage 80000 kW [19].

Iako se godinama sumnja kako tržište prijevoza robe kontejnerima mora već jednom dosegnuti zrelost, nakon čega bi uslijedilo usporavanje njegovog rasta, to se još nije dogodilo. Optimizam brodarskih kompanija, vidljiv u knjigama narudžbi, sugerira da niti neće vrlo uskoro.

Stoga će daljnji rast maksimalne veličine kontejnerskih brodova vjerojatnije zaustaviti ograničenja, kako infrastrukture (i dovoljno brzog opsluživanja takvih brodova) u lukama [9], koja se ulaganjima ipak neprestano proširuju [12], tako i ona prirodna, poput Sueskog kanala, ili prolaza Malacca u jugoistočnoj Aziji. Dok je suezmax (ograničenje prolasku kroz Sueski kanal ne predstavljaju pojedinačne dimenzije broda, već umnožak širine i gaza, odnosno površina uronjenog dijela poprečnog presjeka) veličina kontejnerskih brodova (10000 – 12000 TEU, [18]) već dosegnuta, ostaje vidjeti hoće li i općepoznati projekt profesora Wijnolsta, malaccamax kontejnerski brod nosivosti 18000 TEU, uskoro ugledati svjetlo dana.

1.2. Opis problema

Danas se uobičajeni postupak proračuna odziva brodske konstrukcije na valno opterećenje sastoji iz dva dijela. Najprije se, nekim od raspoloživih 2D ili 3D, linearnih ili nelinearnih modela, provodi hidrodinamička analiza konstrukcije kao krutog tijela, a potom se, prenošenjem tako dobivenih tlakova i ubrzanja na model konstrukcije, (najčešće kvazistatičkom) strukturnom analizom (u frekvencijskom području) dolazi do odziva (na primjer, momenata savijanja, smičnih sila, momenata uvijanja, odnosno naprezanja).

Ovakav je pristup u osnovi približan, budući da brodovi na moru istovremeno doživljavaju i gibanja i deformacije. Većina konvencionalnih brodova dostatno je kruta pa su te deformacije relativno male, a prirodne su frekvencije elastičnih oblika znatno više od frekvencija valnog opterećenja, tako da standardni pristup odvojenog provođenja hidrodinamičke i strukturne analize daje dovoljno dobre rezultate.

Međutim, u posljednje se vrijeme prirodne frekvencije suvremenih brodova sve više preklapaju s onima valne uzbude. S jedne strane optimiziranje brodskih konstrukcija, primjena novih materijala (čelik povišene čvrstoće, aluminij) te sve veća duljina suvremenih brodova za posljedicu imaju smanjenje njihove krutosti, dok, istovremeno, s druge strane, zbog povećavanja brzine (na valovima u pramac broda) rastu susretne frekvencije.

Kod takvih su brodova elastične deformacije vrlo velike, a prirodne frekvencije konstrukcije toliko su niske da morski valovi na njih prenose energiju dostatnu za

pobuđivanje vibracija. Rezonantne vibracije (gotovo isključivo prvog oblika) do kojih dolazi zbog djelovanja neprekinute valne uzbude nazivaju se pruženjem broda (engl. *springing*). U ovim slučajevima više nije moguće pouzdano određivati odziv prenošenjem tlaka dobivenog klasičnim pomorstvenim analizama krutog tijela na model konstrukcije, već je nužno primijeniti teoriju hidroelastičnosti koja obuhvaća međudjelovanje hidrodinamičke okoline i deformabilne konstrukcije.

Osim toga, potpuno sprezanje hidrodinamičkog modela s modelom konstrukcije nužno je primijeniti i u slučajevima kada djelovanje impulsnog opterećenja, poput udaranja dna ili izboja pramca o valove (engl. *slamming*), pobuđuje prolazne vibracije trupa, što se naziva podrhtavanjem broda (engl. *whipping*). Za razliku od pruženja do kojeg dolazi kod umjerenih stanja mora i koje pogađa samo brodove snižene krutosti, podrhtavanje je vezano uz oštra stanja mora i relevantno je za sve vrste brodova. Značaj podrhtavanja osobito je velik kod linijskih kontejnerskih brodova, budući da oni najčešće plove pod veoma striktnim vremenskim ograničenjima pa kapetani, u slučaju lošeg vremena i oštrog mora, imaju smanjenu mogućnost usporavanja broda i promjene smjera plovidbe.

1.3. Hipoteza rada

U posljednje se vrijeme gradi sve više post-panamax kontejnerskih brodova duljine veće od 300 metara i oni postaju sve značajnijim dijelom svjetske flote. Nova generacija ULCC (Ultra Large Container Carrier) brodova izlazi van iskustvenih baza klasifikacijskih društava. Ne samo da se povećava duljina i optimizira konstrukcija, već se mijenja i klasični projekt kontejnerskih brodova – odbacuju se nosači palube, smanjuje se širina bočne konstrukcije, razdvajaju se strojarnica i nadgrađe [20], a zbog podizanja nosivosti povećava se površina palube, što dovodi do značajnog izboja pramca [12]. Iz tog razloga brodograđevni inženjeri, uz primjenu tradicionalnih poluempirijskih pravila klasifikacijskih društava, moraju primijeniti racionalan pristup pri projektiranju, provođenjem dodatnih, izravnih proračuna opterećenja i čvrstoće (engl. *direct load and strength analysis*) takvih brodova [12, 21, 22].

Prednost teorije hidroelastičnosti u odnosu na klasičnu analizu fizikalno je točnija idealizacija međudjelovanja fluida i konstrukcije koja rezultira pouzdanijim dinamičkim odzivom broda na valovima. Prirodne frekvencije elastičnih oblika današnjih brodova sve se više približavaju frekvencijama na kojima morski valovi već posjeduju značajan iznos energije, tako da prestaju vrijediti pretpostavke (klasičnog pristupa pomorstvenosti) o

međusobnoj nezavisnosti gibanja i deformacija broda, koje su omogućavale određivanje odziva brodske konstrukcije provođenjem odvojene hidrodinamičke i strukturne analize.

Hidroelastična analiza omogućuje točniju provjeru zadovoljavanja projektnih kriterija, kako onog granične čvrstoće konstrukcije (podrhtavanje trupa uslijed udaranja pramca o valove stvara dodatne momente savijanja koji mogu ugroziti primarnu čvrstoću trupa), tako i onog zamora materijala konstrukcijskih detalja (zanemarivanjem utjecaja pruženja broda može se znatno podcijeniti akumulirano oštećenje).

Postoje učinkoviti numerički modeli za analizu globalnog hidroelastičnog odziva brodskih konstrukcija u vertikalnoj ravnini, relevantnog za većinu uobičajenih brodova. Zbog ograničene primjene, nije došlo do jednakog razvoja sličnih metoda koje bi se mogle koristiti kod kontejnerskih brodova koje karakteriziraju veliki palubni otvori, a kod kojih su relevantne prirodne frekvencije spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija (koje su niže od onih vertikalnih vibracija).

Stoga postoji snažna potreba za izradom pouzdanog spregnutog modela za proračun hidroelastičnog odziva velikih kontejnerskih brodova. Kombiniranjem jednodimenzionalnog strukturnog modela s trodimenzionalnim hidrodinamičkim modelom Bureau Veritasa, dobit će se alat koji će se moći koristiti za provjeru čvrstoće kontejnerskih brodova u ranoj fazi osnivanja.

Korištenje trodimenzionalnog strukturnog modela konačnih elemenata, što se namjerava provesti u Bureau Veritasu, trebalo bi rezultirati još točnijim spregnutim modelom koji bi se mogao koristiti u daljnjim fazama projektiranja i gradnje broda.

1.4. Pregled osnovne literature

Jedan od prvih članaka o problemu pruženja broda objavio je M.A. Gelgova 1962. godine [23]. Nakon toga, ponuđeno je nekoliko jednostavnih metoda proračuna, među kojima i ona Goodmanova [24] iz 1971. godine koja je, uz njihanje krutog tijela, uzimala u obzir i prvi elastični oblik vertikalnog savijanja broskog trupa (u obliku sustava s jednim stupnjem slobode).

U praksi su se problemi s elastičnim vibriranjem trupa uslijed valne uzbude najprije, zbog njihove snižene krutosti, uočili na brodovima za prijevoz rasutih tereta koji su plovili Velikim jezerima [25], a nakon toga i na velikim preookeanskim trgovačkim brodovima.

Krajem sedamdesetih godina prošlog stoljeća, Bishop i Price [26] udarili su racionalnije temelje teoriji hidroelastičnosti, postavivši principe za savitljive vitke brodove izvrgnute stalnim ili prolaznim valnim opterećenjima. Njihova jedinstvena teorija grednih odsječaka (engl. *unified strip-beam theory*) sastoji se u kombiniranju Timošenkove grede kao pojednostavljenog, jednodimenzionalnog strukturnog modela, s dvodimenzionalnom hidrodinamičkom metodom odsječaka, *bez sprežanja jednažbi*. Time su uspješno simulirali simetrično, antisimetrično i nesimetrično ponašanje različitih trgovačkih i ratnih brodova na valovima. Usporedbe s rezultatima eksperimenata i mjerenja u naravnoj veličini [27] potvrdile su valjanost takvog pristupa za tadašnje brodove.

Nekoliko godina kasnije, Bishop i Price [28] su, u suradnji s Wuom koji je na tu temu napisao disertaciju [23], zamjenom metode odsječaka trodimenzionalnom teorijom potencijalnog strujanja, proširili linearnu teoriju na treću dimenziju, što je omogućilo primjenu na plovila općeg (negredolikog) oblika.

Otad su nastale mnoge metode koje sprežu različite modele konstrukcije (gredne ili cjelovite trodimenzionalne modele konačnih elemenata) s različitim hidrodinamičkim teorijama (sve više se koriste trodimenzionalne metode). Osim toga, u obzir se uzimaju i različiti nelinearni učinci, bilo njihovim lineariziranjem i analizom u frekvencijskom području, bilo prelaskom u vremensko područje.

Zbog trenda sve elastičnijih brodova (zbog povećanja duljine, optimiziranja konstrukcije i upotrebe čelika povišene čvrstoće) i brodova sve većih brzina, hidroelastične teorije posljednjih godina dobivaju na važnosti.

Provede se usporedbe numeričkih proračuna s rezultatima pokusa na modelima (obično segmentiranim, a vrlo rijetko potpuno elastičnim) i mjerenja u punoj veličini. Ne razmatraju se samo konvencionalni trgovački brodovi [na primjer, 29], već i ratni brodovi, brodovi velikih brzina [30], višetrupci [31, 32], SWATH (*Small-Waterplane-Area Twin-Hull ships*) brodovi pa čak i veoma velike plutajuće konstrukcije (na primjer, plutajuće zračne luke duljine i do 5 kilometara) [33].

Gotovo u pravilu proučava se odziv brodskih konstrukcija u vertikalnoj ravnini, budući da je on i najvažniji kod najvećeg broja različitih vrsta brodova. Danas postoje učinkoviti numerički modeli za analizu globalnog hidroelastičnog odziva brodskih konstrukcija u vertikalnoj ravnini, nastali, na primjer, kombiniranjem jednodimenzionalnog modela nejednolike Timošenkove grede s klasičnom hidrodinamičkom trodimenzionalnom tehnikom rubnih integralnih jednažbi (engl. *3D boundary integral equation technique*) [34].

Međutim, situacija je dosta lošija kad je riječ o antisimetričnim odzivima (to jest, spregnutom horizontalnom savijanju i uvijanju) brodova s velikim otvorima na palubi – razvoj metoda hidroelastične analize takvih brodova znatno je slabiji.

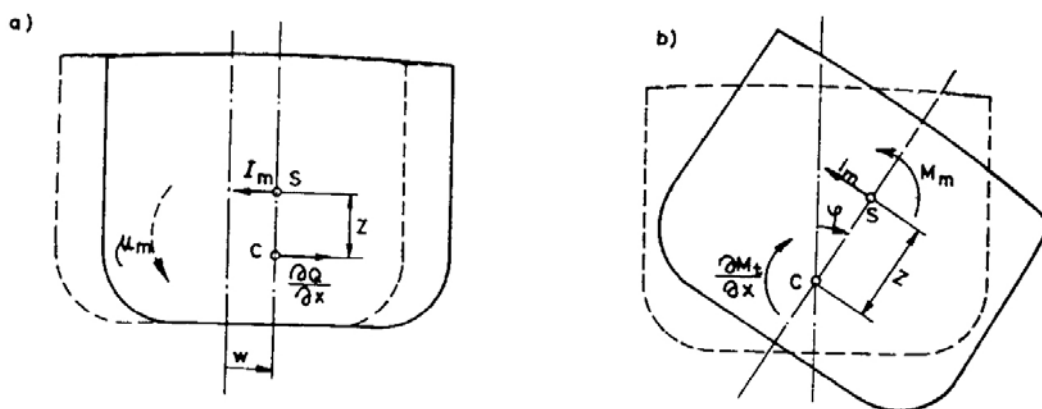
Sredinom devedesetih godina, zbornik *Petnaestog međunarodnog kongresa o brodovima i pomorskim konstrukcijama* (ISSC) [35] navodi potencijalno zanimljiv rad na kineskom jeziku – Yen i drugi primijenili su trodimenzionalnu potencijalnu teoriju i teoriju tankostjenih nosača (koja uzima u obzir smicanje, vitoperenje i zakretanje poprečnih presjeka) za analizu spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija kontejnerskih brodova.

Pokušaj [36, 37] primjene identičnog strukturnog modela onom korištenom u analizi odziva u vertikalnoj ravnini, Timošenkove grede, samo je potvrdio da se realni odzivi horizontalnog savijanja i uvijanja trupa mogu dobiti isključivo primjenom složenijeg jednodimenzionalnog strukturnog modela koji uzima u obzir i vitoperenje i položaj centra uvijanja poprečnog presjeka [38, 39].

Iako je, po saznanjima autora, napravljen određeni (nedovoljno dobro dokumentiran) korak u pravom smjeru (iako na primjeru FPSO broda) [40], može se reći da ne postoji pouzdan numerički model za proračun hidroelastičnog odziva velikih kontejnerskih brodova.

Sveoubuhvatan pregled dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih, linearnih i nelinearnih teorija hidroelastičnosti, s naglaskom na primjenu na VLFS (*Very Large Floating Structures*) konstrukcije, donosi [41].

presjeka trupa oko težišta T, u središtu masa S, osim inercijske sile koja uravnotežuje prirast poprečne sile, nastaje i uzdužna sila inercije koja dovodi do uzdužnih vibracija.



Slika 2.2 Sprega horizontalnih i torzijskih vibracija [43]

Poprečnim vibriranjem broskog trupa, slika 2.2 a), spreg sile inercije u središtu masa S i prirasta poprečne sile u centru torzije C stvara moment uvijanja koji uvjetuje pojavu torzijskih vibracija. Kod torzijskih vibracija, slika 2.2 b), uslijed zakretanja poprečnog presjeka oko centra torzije C, u središtu masa S, osim momenta uslijed inercije mase koji uravnotežuje prirast momenta uvijanja, nastaje i poprečna inercijska sila koja uzrokuje horizontalne vibracije trupa.

Vibracije u vertikalnoj ravnini u pravilu se razmatraju odvojeno, budući da je udaljenost središta masa od neutralne linije vertikalnog savijanja obično zanemarivo mala. Prilikom analize konvencionalnih brodova također se rasprežu i horizontalne i torzijske vibracije. Međutim, kod brodova sa širokim palubnim otvorima (smanjene krutosti na uvijanje), udaljenost između središta masa i centra torzije (koji se može nalaziti čak i izvan poprečnog presjeka trupa) više se ne može zanemariti, tako da je nužno analizirati spregnute horizontalne i torzijske vibracije broskog trupa.

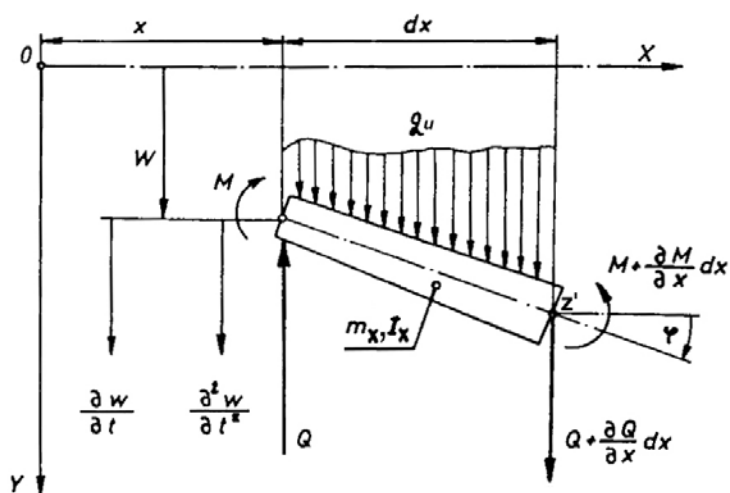
U svrhu proračuna nekoliko prvih prirodnih oblika, kod kojih udaljenost među čvorovima ne prelazi dimenzije poprečnog presjeka broda, brodska se konstrukcija može predstaviti matematičkim modelom u obliku slobodnog nosača promjenljivih (geometrijskih i inercijskih) značajki poprečnog presjeka.

2.2. Poprečne vibracije nosača

2.2.1. Euler – Bernoullijeva greda

Euler – Bernoullijeva greda najjednostavniji je matematički model za analizu poprečnih vibracija. Elastična je linija savijanja nosača prostorno-vremenska funkcija:

$$w = w(x, t). \quad (2.1)$$



Slika 2.3 Euler – Bernoullijeva greda [43]

Razmatranjem ravnoteže diferencijalnog elementa nosača, slika 2.3, dobivaju se sljedeće jednačbe:

$$\sum F_y = 0 : -Q + q_u \cdot dx + Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx = 0 \quad (2.2)$$

$$\sum M_z = 0 : -M - \frac{\partial M}{\partial x} \cdot dx - q_u \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + M + Q \cdot dx = 0, \quad (2.3)$$

iz kojih, uz zanemarivanje infinitezimalnih veličina nižeg reda, slijedi:

$$q_u(x, t) = -\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$Q(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Ukupno opterećenje sastoji se od inercijskog i uzbuđenog dijela:

$$q_u(x,t) = -m_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + q_x(x,t), \quad (2.6)$$

gdje je m_x masa broda po jedinici duljine. Uvrštavanjem izraza (2.4), a potom i onog (2.5) u gornju jednadžbu dobiva se:

$$-\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + m_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q_x(x,t) \quad (2.7)$$

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + m_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q_x(x,t). \quad (2.8)$$

Uz dobro poznatu ovisnost momenta savijanja o progibu:

$$M(x,t) = -EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \quad (2.9)$$

gdje je E Youngov modul elastičnosti, a I_x moment tromosti poprečnog presjeka trupa s obzirom na os y ili os z (vertikalne ili horizontalne vibracije), iz izraza (2.8) dolazi se do diferencijalne jednadžbe poprečnih vibracija Euler – Bernoullijeve grede:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + m_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q_x(x,t). \quad (2.10)$$

2.2.2. Timošenkova greda

Timošenkova greda predstavlja složeniji strukturni model koji se obično koristi u hidroelastičnim analizama odziva konvencionalnih brodova (u vertikalnoj ravni), a kod kojega se u obzir uzimaju i smične sile i zakretanje masa oko vertikalne osi. Ukupni se progib sastoji od progiba savijanja w i progiba smicanja v :

$$y(x,t) = w(x,t) + v(x,t). \quad (2.11)$$

Razmatranjem ravnoteže diferencijalnog elementa nosača, slika 2.4, dobivaju se sljedeće jednadžbe:

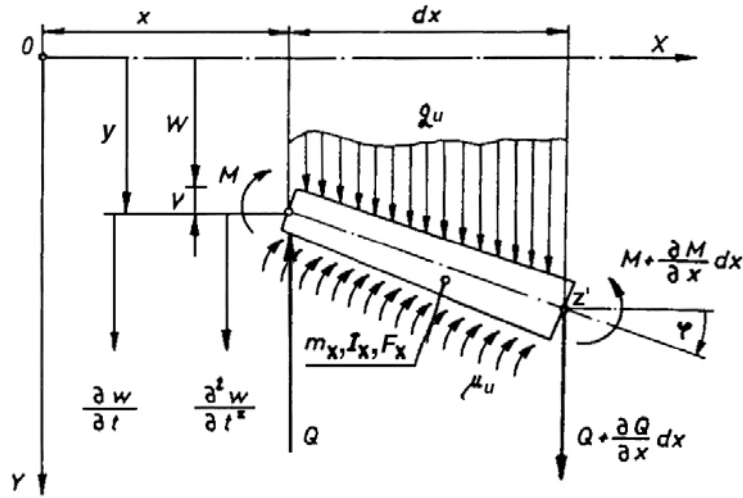
$$\sum F_y = 0 : -Q + q_u \cdot dx + Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx = 0 \quad (2.12)$$

$$\sum M_z = 0 : -M - \frac{\partial M}{\partial x} \cdot dx - q_u \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + M + Q \cdot dx + \mu_u \cdot dx = 0, \quad (2.13)$$

iz kojih, uz zanemarivanje infinitezimalnih veličina nižeg reda, slijedi:

$$q_u(x,t) = -\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$\mu_u(x,t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - Q(x,t). \quad (2.15)$$



Slika 2.4 Timošenkova greda [43]

Ukupno opterećenje sastoji se od inercijskog i uzbuđenog dijela:

$$q_u(x,t) = -m_x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + q_x(x,t) \quad (2.16)$$

$$\mu_u(x,t) = -J_{bx} \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} + \mu_x(x,t), \quad (2.17)$$

gdje je J_{bx} moment tromosti mase broda (po jedinici duljine) s obzirom na os y ili os z (vertikalne ili horizontalne vibracije). Uvrštavanjem izraza (2.14) i (2.15) u jednadžbe (2.16) i (2.17) dobiva se:

$$-\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + m_x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = q_x(x,t) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - Q(x,t) + J_{bx} \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} = \mu_x(x,t). \quad (2.19)$$

Uz dobro poznatu ovisnost momenta savijanja o progibu savijanja:

$$M(x,t) = -EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \quad (2.20)$$

smične sile o progibu smicanja:

$$Q(x,t) = GF_x \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \quad (2.21)$$

gdje je G modul smika, a F_x faktor krutosti poprečnog presjeka trupa na smicanje s obzirom na os z ili os y (vertikalne ili horizontalne vibracije); te kuta zakreta poprečnog presjeka o progibu savijanja:

$$\varphi(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad (2.22)$$

jednadžbe (2.18) i (2.19) prelaze u:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(GF_x \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) + m_x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = q_x(x,t) \quad (2.23)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) - GF_x \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} = \mu_x(x,t). \quad (2.24)$$

Iz (2.24) slijedi:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{\mu_x(x,t)}{GF_x}, \quad (2.25)$$

a iz (2.23):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{m_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(GF_x \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{m_x} q_x(x,t), \quad (2.26)$$

što, uz (2.25), daje:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{m_x} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) - \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x} + q_x(x,t) \right]. \quad (2.27)$$

Iz (2.25), uzimajući u obzir (2.11), proizlazi:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{\mu_x(x,t)}{GF_x}. \quad (2.28)$$

Nakon deriviranja izraza (2.27) jednom po x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x \partial t^2} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m_x} \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x(x,t)}{m_x} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

i jednadžbe (2.28) dvaput po vremenu t :

$$\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial w^3(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x \partial t^4} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial^2 \mu_x(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

te izjednačavanja posljednja dva izraza:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) \right] - \\ & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m_x} \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x(x,t)}{m_x} \right) = \\ & = \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x \partial t^4} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial^2 \mu_x(x,t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

dobiva se diferencijalna jednadžba poprečnih vibracija Timošenkovske grede:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) \right] - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \\ & + \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x \partial t^4} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x(x,t)}{m_x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m_x} \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{GF_x} \frac{\partial^2 \mu_x(x,t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.3. Torzijske vibracije nosača

Elastična linija uvijanja nosača:

$$\psi = \psi(x,t). \quad (2.33)$$

Iz razmatranja ravnoteže diferencijalnog elementa nosača, slika 2.5, slijedi:

$$\sum M_x = 0 \quad : \quad -M_t + \mu_{tu} \cdot dx + M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} \cdot dx = 0, \quad (2.34)$$

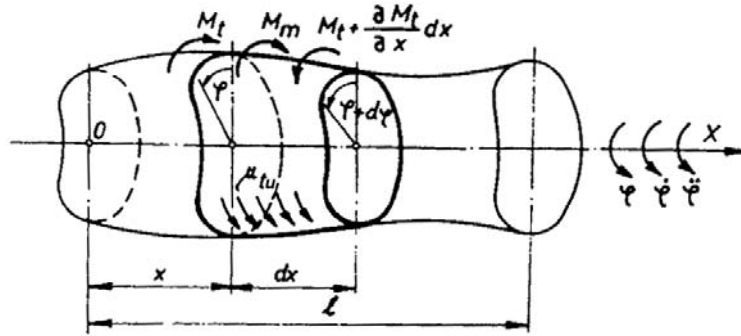
iz čega proizlazi:

$$\mu_{tu}(x,t) = -\frac{\partial M_t(x,t)}{\partial x}. \quad (2.35)$$

Ukupno opterećenje sastoji se od inercijskog i uzbudnog dijela:

$$\mu_{tu}(x,t) = -J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} + \mu_{tx}(x,t), \quad (2.36)$$

gdje je J_{mx} polarni moment tromosti mase (po jedinici duljine) s obzirom na središte mase.



Slika 2.5 Gredni model zatvorenog poprečnog presjeka [43]

Uvrštavanjem izraza (2.35) u gornju jednadžbu dobiva se:

$$-\frac{\partial M_t(x,t)}{\partial x} + J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \mu_{tx}(x,t). \quad (2.37)$$

2.3.1. Gredni model trupa zatvorenog poprečnog presjeka

Budući da poprečni presjeci brodova s normalnim palubnim otvorima posjeduju dostatnu krutost na uvijanje, može se pretpostaviti da do vitoperenja niti ne dolazi pa se ono može zanemariti. Uvrštavanjem dobro poznate ovisnosti momenta uvijanja o kutu uvijanja:

$$M_t(x,t) = GI_{tx} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}, \quad (2.38)$$

gdje je I_{tx} faktor krutosti poprečnog presjeka trupa na oko uzdužne osi, u jednadžbu (2.37), dolazi se do diferencijalne jednadžbe torzijskih vibracija grednog modela trupa zatvorenog presjeka:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(GI_{tx} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) + J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \mu_{tx}(x,t). \quad (2.39)$$

2.3.2. Gredni model trupa otvorenog poprečnog presjeka

Kod brodova sa širokim grotlenim otvorima krutost na uvijanje je mala pa se vitoperenje ne može zanemariti. Uvrštavanjem momenta uvijanja, sastavljenog od momenta čistog uvijanja i momenta uslijed ograničenosti vitoperenja poprečnog presjeka:

$$M_t(x, t) = M_t^0(x, t) + M_t^*(x, t) = GI_{tx} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - EI_{wx} \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x^3}, \quad (2.40)$$

gdje je I_{wx} faktor krutosti poprečnog presjeka trupa na vitoperenje s obzirom na uzdužnu os; u jednadžbu (2.37), dobiva se diferencijalna jednadžba torzijskih vibracija grednog modela trupa otvorenog presjeka:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(GI_{tx} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_{wx} \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x^3} \right) + J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \mu_{tx}(x, t). \quad (2.41)$$

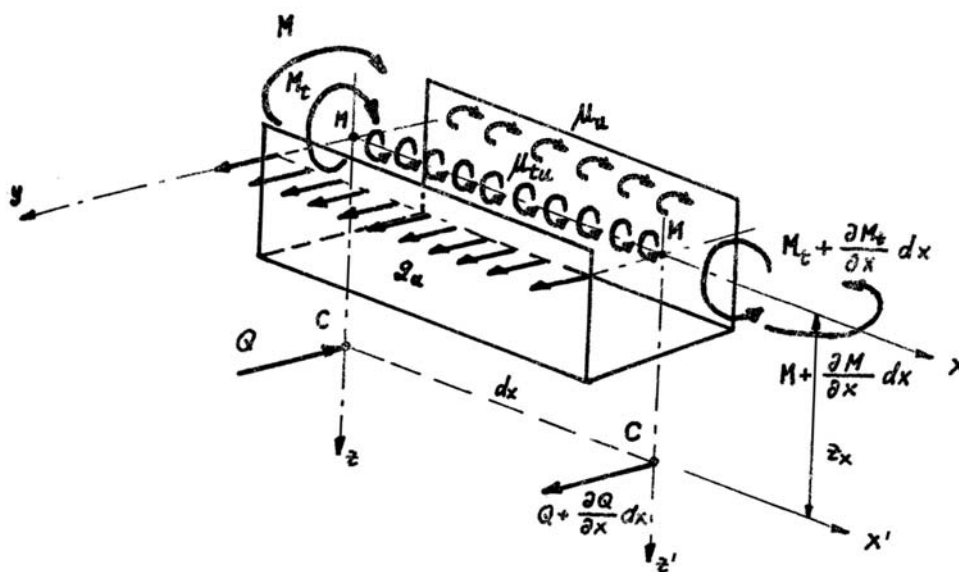
2.4. Spregnute horizontalne i torzijske vibracije nosača

Ukupni se progib sastoji od progiba savijanja w i progiba smicanja v :

$$y(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad (2.42)$$

dok je elastična linija uvijanja nosača:

$$\psi = \psi(x, t). \quad (2.43)$$



Slika 2.6 Gredni model trupa otvorenog presjeka [44]

Razmatranjem ravnoteže diferencijalnog elementa nosača, slika 2.6, dobivaju se sljedeće jednadžbe:

$$\sum F_y = 0 : -Q + q_u \cdot dx + Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx = 0 \quad (2.44)$$

$$\sum M_{z'} = 0 : -M - \frac{\partial M}{\partial x} \cdot dx - q_u \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + M + Q \cdot dx + \mu_u \cdot dx = 0 \quad (2.45)$$

$$\sum M_{x'} = 0 : -M_t + \mu_{tu} \cdot dx + q_u(x, t) \cdot z_x \cdot dx + M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} \cdot dx = 0, \quad (2.46)$$

iz kojih, uz zanemarivanje infinitezimalnih veličina nižeg reda, slijedi:

$$q_u(x, t) = -\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \quad (2.47)$$

$$\mu_u(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - Q(x, t) \quad (2.48)$$

$$\mu_{tu}(x, t) + q_u(x, t) \cdot z_x = -\frac{\partial M_t(x, t)}{\partial x}. \quad (2.49)$$

gdje je z_x udaljenost središta mase od centra uvijanja. Ukupno opterećenje sastoji se od inercijskog i uzbudnog dijela:

$$q_u(x, t) = -m_x \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + z_x \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right) + q_x(x, t) \quad (2.50)$$

$$\mu_u(x, t) = -J_{bx} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} + \mu_x(x, t) \quad (2.51)$$

$$\mu_{tu}(x, t) = -J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} + \mu_{tx}(x, t). \quad (2.52)$$

Uvrštavanjem izraza (2.50) u jednadžbu (2.47) dobiva se:

$$-\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + m_x \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + z_x \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right) = q_x(x, t), \quad (2.53)$$

izraza (2.51) u jednadžbu (2.48):

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - Q(x, t) + J_{bx} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = \mu_x(x, t), \quad (2.54)$$

a izrazâ (2.50) i (2.52) u jednadžbu (2.49):

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial M_t(x, t)}{\partial x} + J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} + m_x \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + z_x \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right) z_x = \mu_{tx}(x, t) + q_x(x, t) \cdot z_x \\ & -\frac{\partial M_t(x, t)}{\partial x} + J_{mx}^* \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} + m_x z_x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \mu_{tx}(x, t) + q_x(x, t) \cdot z_x, \end{aligned} \quad (2.55)$$

gdje je:

$$J_{mx}^* = J_{mx} + m_x z_x^2 \quad (2.56)$$

polarni moment tromosti mase (po jedinici duljine) s obzirom na centar torzije.

Uz dobro poznatu ovisnost momenta savijanja o progibu uslijed savijanja:

$$M(x, t) = -EI_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.57)$$

smične sile o progibu uslijed smicanja:

$$Q(x, t) = GF_x \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \quad (2.58)$$

te kuta zaokreta poprečnog presjeka o progibu savijanja:

$$\varphi(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (2.59)$$

jednadžbe (2.53) i (2.54) prelaze u:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(GF_x \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) + m_x \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + z_x \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right) = q_x(x, t) \quad (2.60)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) - GF_x \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + J_{bx} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x \partial t^2} = \mu_x(x, t). \quad (2.61)$$

Iz (2.61) slijedi:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{\mu_x(x, t)}{GF_x}, \quad (2.62)$$

a iz (2.60):

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{m_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(GF_x \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{q_x(x, t)}{m_x} - z_x \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.63)$$

što, uz (2.62), daje:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{m_x} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right) - \frac{\partial \mu_x(x, t)}{\partial x} \right] + \\ + \frac{q_x(x, t)}{m_x} - z_x \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Iz (2.62), uzimajući u obzir (2.42), proizlazi:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{\mu_x(x, t)}{GF_x}. \quad (2.65)$$

Nakon deriviranja izraza (2.64) jednom po x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x \partial t^2} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) \right] - \\ & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m_x} \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x(x,t)}{m_x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(z_x \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

i jednadžbe (2.65) dvaput po vremenu t:

$$\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x \partial t^4} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial^2 \mu_x(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.67)$$

te izjednačavanja posljednja dva izraza dobiva se:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) \right] - \\ & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m_x} \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x(x,t)}{m_x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(z_x \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \right) = \\ & = \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x \partial t^4} - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial^2 \mu_x(x,t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) \right] - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \\ & + \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x \partial t^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(z_x \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x(x,t)}{m_x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m_x} \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{GF_x} \frac{\partial^2 \mu_x(x,t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Iz jednadžbe (2.55) slijedi:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{m_x z_x} \frac{\partial M_t(x,t)}{\partial x} - \frac{J_{mx}^*}{m_x z_x} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\mu_{tx}(x,t)}{m_x z_x} + \frac{q_x(x,t)}{m_x}. \quad (2.70)$$

Izjednačavanjem posljednjeg izraza s onim (2.64) dobiva se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_x} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) - \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x} \right] + \frac{q_x(x,t)}{m_x} - z_x \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1}{m_x z_x} \frac{\partial M_t(x,t)}{\partial x} - \frac{J_{mx}^*}{m_x z_x} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\mu_{tx}(x,t)}{m_x z_x} + \frac{q_x(x,t)}{m_x}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Množenje obje strane gornje jednačbe s $m_x z_x$ daje:

$$\begin{aligned} z_x \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) - \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x} + q_x(x,t) \right] - m_x z_x^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{\partial M_t(x,t)}{\partial x} - J_{mx}^* \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} + \mu_{tx}(x,t) + q_x(x,t) \cdot z_x, \end{aligned} \quad (2.72)$$

odakle, uz primjenu (2.56), proizlazi:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M_t(x,t)}{\partial x} + J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} - z_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + z_x \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) = \\ = \mu_{tx}(x,t) + z_x \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Jednačbe (2.69) i (2.73) tvore sustav diferencijalnih jednačbi spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija. Uvrštavanjem izraza (2.38) posljednja jednačba sustava prelazi u oblik koji vrijedi za brodove s normalnim otvorima na palubi:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(GI_{tx} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) + J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} - z_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + z_x \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) = \\ = \mu_{tx}(x,t) + z_x \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

dok, uz primjenu izraza (2.40), ista jednačba dobiva oblik valjan za brodove sa širokim grotlenim otvorima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_{wx} \frac{\partial^3 \psi(x,t)}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(GI_{tx} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) + J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} - z_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \\ + z_x \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) = \mu_{tx}(x,t) + z_x \frac{\partial \mu_x(x,t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

2.5. Harmonijske vibracije

Periodička se uzbuda, perioda T_E , može predstaviti Fourierovim redom harmonijskih funkcija:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_E t + b_n \sin n\omega_E t), \quad (2.76)$$

gdje je:

$$\omega_E = \frac{2\pi}{T_E} \quad (2.77)$$

frekvencija uzbude, dok su a_n i b_n Fourierovi koeficijenti funkcije $F(t)$ koji se određuju iz Eulerovih formula:

$$a_n = \frac{2\pi}{T_E} \int_0^{T_E} F(t) \cos n\omega_E t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.78)$$

$$b_n = \frac{2\pi}{T_E} \int_0^{T_E} F(t) \sin n\omega_E t dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

Proširivanjem ovog koncepta:

$$T_E \rightarrow \infty, \omega_E \rightarrow d\Omega, n\omega_E \rightarrow \Omega, \quad (2.80)$$

opća se (neperiodička) uzbuda može prikazati Fourierovim integralom:

$$F(t) = \int_0^\infty (A(\Omega) \cos \Omega t + B(\Omega) \sin \Omega t) d\Omega, \quad (2.81)$$

gdje su:

$$A(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(t) \cos \Omega t dt \quad (2.82)$$

$$B(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(t) \sin \Omega t dt. \quad (2.83)$$

Temeljni teorem u teoriji (parcijalnih) diferencijalnih jednadžbi, princip linearnosti ili superponiranja [45], navodi da, u slučaju kada su u_1 i u_2 bilo koja rješenja linearne homogene (parcijalne) diferencijalne jednadžbe, i linearna kombinacija tih rješenja, $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$, također predstavlja rješenje iste jednadžbe. Na primjer, ukoliko su $w_1(t)$ i $w_2(t)$ rješenja diferencijalne jednadžbe prisilnih vibracija sustava s jednim stupnjem slobode:

$$m\ddot{w} + n\dot{w} + cw = F(t), \quad (2.84)$$

za odgovarajuće uzbude $F_1(t)$ i $F_2(t)$, tada je i $c_1 w_1(t) + c_2 w_2(t)$ rješenje iste jednadžbe za uzbudu $c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)$:

$$\begin{aligned} m(c_1 \ddot{w}_1 + c_2 \ddot{w}_2) + n(c_1 \dot{w}_1 + c_2 \dot{w}_2) + c(c_1 w_1 + c_2 w_2) &= c_1 (m\ddot{w}_1 + n\dot{w}_1 + cw_1) + \\ &+ c_2 (m\ddot{w}_2 + n\dot{w}_2 + cw_2) = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Stoga je, za slučaj periodičke (i opće, neperiodičke) uzbude, dostatno poznavati odziv na opći sinusni ili kosinusni član Fourierovog reda (integrala), odnosno na čistu harmonijsku uzbudu. Na taj se način, eliminiranjem vremenskog dijela funkcije odziva metodom separiranja varijabli, problem rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi gibanja svodi na rješavanje jednostavnijih, običnih diferencijalnih jednačbi istog oblika.

2.5.1. Poprečne vibracije nosača

Harmonijski član Fourierovog reda koji opisuje periodičko poprečno opterećenje glasi:

$$q_x(x, t) = q_x \sin \lambda t. \quad (2.86)$$

Elastična linija savijanja nosača mijenja se po istom zakonu:

$$w(x, t) = w_x \sin \lambda t. \quad (2.87)$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u parcijalnu diferencijalnu jednačbu poprečnih vibracija Euler – Bernoullijeve grede (2.10):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + m_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = q_x(x, t),$$

dobiva se obična diferencijalna jednačba za amplitudu vibracija:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_x \frac{d^2 w_x}{dx^2} \right) - \lambda^2 m_x w_x = q_x. \quad (2.88)$$

Analogno tome, uz:

$$\mu_x(x, t) = \mu_x \sin \lambda t, \quad (2.89)$$

iz jednačbe poprečnih vibracija Timošenkove grede (2.32):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{m_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(J_{bx} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right) \right] - \frac{1}{GF_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_x \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \\ & + \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial x \partial t^4} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x(x, t)}{m_x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m_x} \frac{\partial \mu_x(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{GF_x} \frac{\partial^2 \mu_x(x, t)}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

proizlazi:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{m_x} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_x \frac{d^2 w_x}{dx^2} \right) \right] + \lambda^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{m_x} \frac{d}{dx} \left(J_{bx} \frac{\partial dw_x}{dx} \right) \right] + \lambda^2 \frac{1}{GF_x} \frac{d}{dx} \left(EI_x \frac{d^2 w_x}{dx^2} \right) + \\
& - \lambda^2 \frac{dw_x}{dx} + \lambda^4 \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{dw_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{q_x}{m_x} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m_x} \frac{d\mu_x}{dx} \right) - \lambda^2 \frac{1}{GF_x} \mu_x.
\end{aligned} \quad (2.90)$$

2.5.2. Torzijske vibracije nosača

Ukoliko je nosač izložen harmonijskom torzijskom opterećenju:

$$\mu_{tx}(x, t) = \mu_{tx} \sin \lambda t, \quad (2.91)$$

elastična linija uvijanja nosača slijedi isti zakon:

$$\psi(x, t) = \psi_x \sin \lambda t. \quad (2.92)$$

Uvrštavanjem gornjih jednačbi, iz izraza (2.39) za torzijske vibracije grednog modela trupa zatvorenog presjeka:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(GI_{tx} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \mu_{tx}(x, t),$$

slijedi:

$$-\frac{d}{dx} \left(GI_{tx} \frac{d\psi_x}{dx} \right) - \lambda^2 J_{mx} \psi_x = \mu_{tx}; \quad (2.93)$$

dok se iz jednačbe (2.41) za nosač trupa otvorenog presjeka:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(GI_{tx} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_{wx} \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x^3} \right) + J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \mu_{tx}(x, t),$$

dobiva:

$$-\frac{d}{dx} \left(GI_{tx} \frac{d\psi_x}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(EI_{wx} \frac{d^3 \psi_x}{dx^3} \right) - \lambda^2 J_{mx} \psi_x = \mu_{tx}. \quad (2.94)$$

2.5.3. Spregnute horizontalne i torzijske vibracije nosača

U slučaju spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija, poprečna sila, moment savijanja i moment uvijanja koji djeluju na nosač harmonijskog su karaktera:

$$q_x(x, t) = q_x \sin \lambda t$$

$$\mu_x(x, t) = \mu_x \sin \lambda t \quad (2.95)$$

$$\mu_{tx}(x, t) = \mu_{tx} \sin \lambda t,$$

jednako kao i elastične linije savijanja i uvijanja grede:

$$w(x, t) = w_x \sin \lambda t$$

$$\psi(x, t) = \psi_x \sin \lambda t. \quad (2.96)$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u sustav diferencijalnih jednačbi spregnutih vibracija (2.69) i (2.74) za brodove s normalnim otvorima na palubi dobiva se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{m_x} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_x \frac{d^2 w_x}{dx^2} \right) \right] + \lambda^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{m_x} \frac{d}{dx} \left(J_{bx} \frac{dw_x}{dx} \right) \right] + \lambda^2 \frac{1}{GF_x} \frac{d}{dx} \left(EI_x \frac{d^2 w_x}{dx^2} \right) - \lambda^2 \frac{dw_x}{dx} + \\ + \lambda^4 \frac{J_{bx}}{GF_x} \frac{dw_x}{dx} - \lambda^2 \frac{d}{dx} (z_x \psi_x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{q_x}{m_x} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m_x} \frac{d\mu_x}{dx} \right) - \lambda^2 \frac{1}{GF_x} \mu_x \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dx} \left(GI_{tx} \frac{d\psi_x}{dx} \right) - \lambda^2 J_{mx} \psi_x - z_x \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_x \frac{d^2 w_x}{dx^2} \right) - \lambda^2 z_x \frac{d}{dx} \left(J_{bx} \frac{dw_x}{dx} \right) = \\ = \mu_{tx} + z_x \frac{d\mu_x}{dx}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

dok se, korištenjem izraza (2.75) kao druge jednačbe sustava kod brodova sa širokim grotlima dolazi do:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(EI_{wx} \frac{d^3 \psi_x}{dx^3} \right) - \frac{d}{dx} \left(GI_{tx} \frac{d\psi_x}{dx} \right) - \lambda^2 J_{mx} \psi_x - z_x \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_x \frac{d^2 w_x}{dx^2} \right) - \\ - \lambda^2 z_x \frac{d}{dx} \left(J_{bx} \frac{dw_x}{dx} \right) = \mu_{tx} + z_x \frac{d\mu_x}{dx}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

2.6. Rješenje problema spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija brodskog trupa metodom konačnih elemenata

2.6.1. Uvod

Dobivene obične diferencijalne jednačbe harmonijskih (spregnutih horizontalnih i torzijskih) vibracija brodskog trupa prilično su složene i, osim u slučaju značajnijih

pojednostavljenja (konstantne geometrijske i inercijske značajke trupa, pojednostavljena prostorna raspodjela opterećenja), nije moguće doći do njihovog egzaktnog analitičkog rješenja. Stoga preostaje okrenuti se približnim numeričkim metodama za rješavanje ovog problema rubnih vrijednosti (engl. *boundary value problem*), pomoću kojih se on može svesti na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednažbi.

Historijski starija grupa numeričkih metoda (u koju, na primjer, spadaju rješavanje diferencijalne jednažbe metodom konačnih diferencija, ili metoda minimuma totalne energije, kao inačica Rayleigh – Ritz varijacijske metode koja se koristi u strukturnoj analizi) razmatra kontinuum (u ovom slučaju nosač promjenljivih karakteristika) u njegovom izvornom obliku, zbog čega je ograničena na jednostavnije geometrijske konfiguracije, rubne uvjete i opterećenja.

Naglim razvojem elektroničkih računala na važnosti dobivaju matrične numeričke metode kod kojih se prostor (fizikalno) diskretizira u određeni broj sastavnih dijelova. Među njima ističe se metoda konačnih elemenata koja se, od prve Courantove primjene u analizi problema uvijanja 1943. godine [46, 47], toliko proširila da se danas, bez ikakve sumnje, može smatrati dominantnom numeričkom tehnikom (ne samo) u strukturnoj analizi.

Ovdje će se koristiti jedna od njene dvije podvrste – metoda pomaka (druga je metoda sila), utemeljena na postavljanju ovisnosti čvornih sila o čvornim pomacima (preko matrice krutosti). Ispunjavanjem uvjeta ravnoteže sila na spojevima elemenata dobiva se sustav algebarskih jednažbi iz kojeg se određuju (nepoznati) pomaci u čvorovima. Za gredne elemente potrebne je izraziti moguće dobiti i na osnovi rješenja diferencijalne jednažbe [48], ali je uobičajeno u tu svrhu iskoristiti jedan od varijacijskih principa – bilo princip virtualnog rada, bilo onaj minimuma ukupne (potencijalne i kinetičke) energije.

2.6.2. Utemeljenost metode konačnih elemenata na varijacijskom principu o stacionarnosti ukupne energije

Varijacijske (energetske) metode rješavanja problema rubnih vrijednosti sastoje se u traženju stacionarnosti funkcionala, s obzirom na (nepoznate) parametre pretpostavljene (pokusne) funkcije rješenja [46]. Funkcional je definiran integralnim oblikom:

$$\Pi = \int_{\Omega} F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) d\Omega + \int_{\Gamma} E\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) d\Gamma, \quad (2.100)$$

gdje je u nepoznata funkcija, F i E poznati operatori, Ω područje problema, a Γ granica tog područja. Rješenje problema kontinuuma funkcija je u koja čini funkcional Π stacionarnim s obzirom na male promjene δu :

$$\delta \Pi = 0. \quad (2.101)$$

Uvrštavanjem funkcije rješenja pretpostavljene u obliku reda:

$$u \approx \hat{u} = \sum_i N_i a_i = \mathbf{N} \mathbf{a}, \quad (2.102)$$

gdje su N_i neprekinute funkcije koje zadovoljavaju barem rubne uvjete i koje su sposobne predstavljati očekivani oblik funkcije rješenja, a a_i nepoznati parametri, u jednadžbu funkcionala, slijedi [46]:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} \delta a_n = 0. \quad (2.103)$$

Budući da posljednji izraz mora vrijediti za svaku promjenu δa , dobiva se sljedeći skup jednadžbi:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} \end{array} \right\} = 0, \quad (2.104)$$

iz kojih se mogu odrediti nepoznati parametri pokusne funkcije a_i .

Zbog svojstva određenih integrala:

$$\int_{\Omega} (...) d\Omega = \sum_{e=1}^{\infty} \int_{\Omega^e} (...) d\Omega, \quad (2.105)$$

ukupni se funkcional može izračunati sumiranjem njegovih dijelova za pojedina potpodručja problema, tako da se gore izloženi principi mogu primijeniti na svako od njih. Baš na takvom određivanju nepoznatih parametara pretpostavljene funkcije rješenja iz uvjeta stacionarnosti funkcionala na svakom pojedinom diskretiziranom dijelu područja i temelji se metoda konačnih elemenata.

Često se fizikalni aspekti problema mogu izravno izraziti u obliku *prirodnog* varijacijskog principa, što omogućuje jednostavno izvođenje jednadžbi konačnih elemenata iz uvjeta (2.104). Upravo je to slučaj s totalnom energijom mehaničkog sustava (ukupnim radom svih sila u sustavu prilikom njegovog prelaza iz opterećene u neopterećenu konfiguraciju):

$$\Pi = U - W, \quad (2.106)$$

gdje je U ukupna energija unutarnjih sila (akumulirana u napregnutoj konstrukciji), a W rad vanjskog opterećenja, čiji je predznak negativan zbog toga što vanjske sile (nepromijenjene

veliĉine i smjera) obavljaju negativan rad pri povratku sustava iz napregnutog u nenapregnuto stanje.

Izraz (2.101) u ovom sluĉaju izraŹava princip o stacionarnoj vrijednosti ukupne energije mehaniĉkog sustava koji kaŹe da je, izmeĊu svih geometrijski moguĉih konfiguracija elastiĉne konstrukcije, ravnoteŹna ona koja Će rezultirati upravo tom stacionarnom vrijednošću.

Ukoliko se stabilno uravnoteŹen sustav (na primjer, kuglica na konkavnoj podlozi) iz tog poloŹaja pomakne, dolazi do porasta njegove potencijalne energije (energije koju sustav posjeduje zahvaljujući svom poloŹaju). Iz toga slijedi da stanju stabilne ravnoteŹe odgovara minimalna vrijednost te energije, tako da se govori o principu minimuma ukupne energije.

Primjenom metode konaĉnih elemenata ograniĉava se (inaĉe beskonaĉni) broj stupnjeva slobode sustava (broj potpodruĉja na desnoj strani jednakosti (2.105)), tako da se, umjesto stvarnog, apsolutnog minimuma totalne energije, dobiva veća vrijednost. Razlika meĊu njima bit Će, uz ispunjavanje odreĊenih uvjeta (potpunost funkcionala, [46]), tim manja, što je mreŹa konaĉnih elemenata finija, a time i broj stupnjeva slobode sustava veći.

2.6.3. Diferencijalne jednadŹbe harmonijskih spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija za konaĉni element

Iznimnu popularnost metoda konaĉnih elemenata moŹe, izmeĊu ostalog, zahvaliti i svojoj svestranosti, budući da ograniĉenja geometrije (konstrukcije), rubnih uvjeta i opterećenja sada vrijede samo na razini svakog pojedinoga konaĉnog elementa, tako da se i sloŹene, realistiĉne konfiguracije mogu dobiti sklapanjem konaĉnih elemenata relativno jednostavnih oblika.

Usvajanjem pretpostavke da su promjenljive inercijske i geometrijske znaĉajke brodskog trupa konstantne unutar svakog od elemenata:

$$\begin{aligned} I_x &= I & z_x &= z \\ F_x &= F & m_x &= m \\ I_{tx} &= I_t & J_{bx} &= J_b \\ I_{wx} &= I_w & J_{mx} &= J_m \end{aligned} \quad (2.107)$$

dolazi se do jednostavnijih diferencijalnih jednadŹbi harmonijskih spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija koje vrijede na podruĉju pojedinaĉnoga konaĉnog elementa. Ukoliko se jednadŹba (2.97) jednom integrira po x dobiva se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w_x}{dx^2} \right) + \lambda^2 \frac{1}{m} \frac{d}{dx} \left(J_b \frac{dw_x}{dx} \right) + \lambda^2 \frac{EI}{GF} \frac{d^2 w_x}{dx^2} - \lambda^2 w_x + \lambda^4 \frac{J_b}{GF} w_x - \lambda^2 z \psi_x = \\
& = \frac{q_x}{m} - \frac{1}{m} \frac{d\mu_x}{dx} - \lambda^2 \frac{1}{GF_x} \int \mu_x dx,
\end{aligned} \tag{2.108}$$

odnosno, nakon sređivanja:

$$\begin{aligned}
& EI \frac{d^4 w_x}{dx^4} + \lambda^2 \left(m \frac{EI}{GF} + J_b \right) \frac{d^2 w_x}{dx^2} + \lambda^2 \left(\lambda^2 \frac{J_b}{GF} - 1 \right) m w_x - \lambda^2 m z \psi_x = \\
& = q_x - \frac{d\mu_x}{dx} - \lambda^2 \frac{m}{GF_x} \int \mu_x dx.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Iz jednadžbe (2.98) slijedi:

$$- GI_t \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} - \lambda^2 J_m \psi_x - z EI \frac{d^4 w_x}{dx^4} - \lambda^2 z J_b \frac{d^2 w_x}{dx^2} = \mu_{tx} + z \frac{d\mu_x}{dx}. \tag{2.110}$$

Iz jednadžbe (2.109) može se izraziti:

$$\begin{aligned}
& EI \frac{d^4 w_x}{dx^4} = -\lambda^2 \left(m \frac{EI}{GF} + J_b \right) \frac{d^2 w_x}{dx^2} - \lambda^2 \left(\lambda^2 \frac{J_b}{GF} - 1 \right) m w_x + \lambda^2 m z \psi_x + \\
& + q_x - \frac{d\mu_x}{dx} - \lambda^2 \frac{m}{GF_x} \int \mu_x dx
\end{aligned} \tag{2.111}$$

i uvrstiti u jednadžbu (2.110), što, nakon sređivanja, daje:

$$\begin{aligned}
& - GI_t \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} - \lambda^2 J_m^* \psi_x + \lambda^2 m z \frac{EI}{GF} \frac{d^2 w_x}{dx^2} + \lambda^2 \left(\lambda^2 \frac{J_b}{GF} - 1 \right) m z w_x = \\
& = q_x z + \mu_{tx} + \lambda^2 \frac{m z}{GF_x} \int \mu_x dx.
\end{aligned} \tag{2.112}$$

Jednadžbe (2.109) i (2.112) tvore sustav diferencijalnih jednadžbi harmonijskih spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija nosača za konačni element trupa zatvorenog poprečnog presjeka. U slučaju konačnog elementa trupa otvorenog presjeka, umjesto jednadžbe (2.112) koristi se sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}
& EI_w \frac{d^4 \psi_x}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} - \lambda^2 J_m^* \psi_x + \lambda^2 m z \frac{EI}{GF} \frac{d^2 w_x}{dx^2} + \lambda^2 \left(\lambda^2 \frac{J_b}{GF} - 1 \right) m z w_x = \\
& = q_x z + \mu_{tx} + \lambda^2 \frac{m z}{GF_x} \int \mu_x dx.
\end{aligned} \tag{2.113}$$

2.6.4. Ukupna energija konačnog elementa

Ukupna energija svakog mehaničkog sustava jednaka je razlici radova unutarnjih i vanjskih sila. Rad unutarnjih sila sastoji se od deformacijskih energija momenta savijanja:

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI_x \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (2.114)$$

poprečne sile:

$$\frac{1}{2} \int_0^l GF_x \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2.115)$$

čistog momenta uvijanja:

$$\frac{1}{2} \int_0^l GI_{tx} \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.116)$$

i uzdužnih naprezanja uslijed vitoperenja:

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI_{wx} \left(\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx; \quad (2.117)$$

te kinetičkih energija lateralne inercijske sile:

$$\frac{1}{2} \int_0^l m_x \frac{\partial^2 (y(x,t) + z_x \psi(x,t))}{\partial t^2} (y(x,t) + z_x \psi(x,t)) dx, \quad (2.118)$$

horizontalnog momenta tromosti mase presjeka:

$$\frac{1}{2} \int_0^l J_{bx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} dx \quad (2.119)$$

i momenta uvijanja mase:

$$\frac{1}{2} \int_0^l J_{mx} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \psi(x,t) dx. \quad (2.120)$$

Rad vanjskih sila sastoji se od rada distribuiranog poprečnog opterećenja:

$$\int_0^l q_x(x,t) y(x,t) dx, \quad (2.121)$$

distribuiranog momenta savijanja:

$$\int_0^l \mu_x(x,t) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} dx, \quad (2.122)$$

distribuiranog momenta uvijanja:

$$\int_0^l \mu_{tx}(x, t) \psi(x, t) dx \quad (2.123)$$

te rada rubnih poprečnih sila, momenata savijanja, momenata uvijanja i bimomenta:

$$\left(Q_y - M \frac{\partial w}{\partial x} + M_t \psi + T \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0^l. \quad (2.124)$$

Sumiranjem svih ovih članova, u slučaju harmonijskih spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija, ukupna energija konačnog elementa iznosi:

$$\begin{aligned} E_{tot} = & \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} GF \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} GI_t \int_0^l \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} EI_w \int_0^l \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right)^2 dx + \\ & - \frac{\lambda^2 m}{2} \int_0^l y^2 dx - \lambda^2 m z \int_0^l y \psi dx - \frac{\lambda^2 J_b}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx - \frac{\lambda^2 J_m^*}{2} \int_0^l \psi^2 dx - \\ & - \int_0^l q_x y dx - \int_0^l \mu_x \frac{dy}{dx} dx - \int_0^l \mu_{tx} \psi dx - \left(Q_y - M \frac{\partial w}{\partial x} + M_t \psi + T \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0^l. \end{aligned} \quad (2.125)$$

2.6.5. Matrična jednadžba konačnog elementa

2.6.5.1. Konačni element za dijelove brodskog trupa otvorenog presjeka

Za dijelove brodskog trupa sa širokim palubnim otvorima, razvijen je [49] gredni konačni element s osam stupnjeva slobode (slika 2.7). Na elementu su definirani sljedeći čvorni pomaci:

y = horizontalni (ukupni) progib,

φ = kut zakreta poprečnog presjeka uslijed savijanja,

ψ = kut uvijanja i

\mathcal{G} = prirast kuta uvijanja (faktor uzdužnih pomaka);

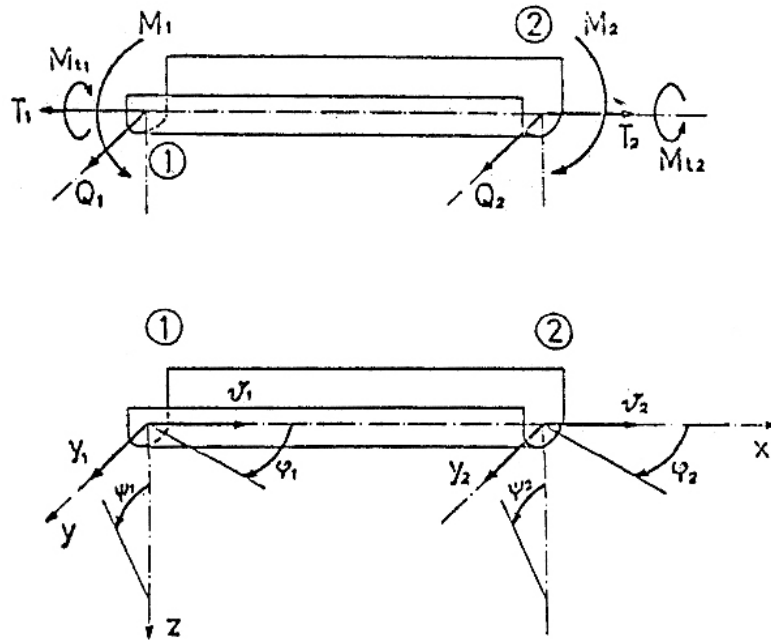
kao i čvorne sile:

Q = poprečna sila,

M = moment savijanja,

M_t = moment uvijanja i

T = bimoment.



Slika 2.7 Gredni konačni element s osam stupnjeva slobode [49]

Budući da će se za određivanje matrične jednadžbe konačnog elementa (koja donosi ovisnost rubnih sila o rubnim pomacima) koristiti pristup minimuma totalne energije, potrebno je pomake unutar elementa izraziti pomoću pomaka u čvorovima. Stoga se elastična linija vibriranja pretpostavlja u obliku reda funkcija:

$$y = \langle y_i \rangle \{U_i\} \quad (2.126)$$

$$\varphi = \langle \varphi_i \rangle \{U_i\} \quad (2.127)$$

$$\psi = \langle \psi_i \rangle \{V_i\} \quad (2.128)$$

$$\mathcal{G} = \langle \mathcal{G}_i \rangle \{V_i\}, \quad (2.129)$$

gdje su $\langle y_i \rangle$, $\langle \varphi_i \rangle$, $\langle \psi_i \rangle$ i $\langle \mathcal{G}_i \rangle$ minimizirajuće funkcije (oblika), dok su nepoznati koeficijenti redova (koji će se odrediti iz uvjeta minimuma ukupne energije):

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} y_i(0) \\ \varphi_i(0) \\ y_i(l) \\ \varphi_i(l) \end{Bmatrix} \quad (2.130)$$

$$\{V_i\} = \begin{Bmatrix} \psi_i(0) \\ \vartheta_i(0) \\ \psi_i(l) \\ \vartheta_i(l) \end{Bmatrix} \quad (2.131)$$

vektori čvornih pomaka savijanja i uvijanja.

Zbog međusobne povezanosti pomaka, progib savijanja w i kut uvijanja ψ odabiru se kao osnovne funkcije, dok se ostali pomaci izražavaju pomoću njih:

$$\varphi = \frac{dw}{dx} \quad (2.132)$$

$$v = -\lambda^2 \frac{J_b}{GF} w - \frac{EI}{GF} \frac{d^2 w}{dx^2} = (\alpha - 1)w - \beta' \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.133)$$

$$y = w + v = \left(1 - \lambda^2 \frac{J_b}{GF}\right) w - \frac{EI}{GF} \frac{d^2 w}{dx^2} = \alpha w - \beta' \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.134)$$

$$\vartheta = \frac{d\psi}{dx}, \quad (2.135)$$

gdje je:

$$\alpha = 1 - \lambda^2 \frac{J_b}{GF} \quad (2.136)$$

$$\beta' = \frac{EI}{GF}, \quad (2.137)$$

dok je v progib uslijed smicanja.

Budući da i savijanje i uvijanje konačnog elementa trupa sa širokim palubnim otvorima opisuju po četiri čvorna pomaka, funkcije oblika (utjecajne linije jediničnih rubnih pomaka) progiba savijanja i kuta uvijanja pretpostavljaju se u obliku polinoma trećeg stupnja:

$$w_i = a_{i0} + a_{i1} \frac{x}{l} + a_{i2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + a_{i3} \left(\frac{x}{l}\right)^3 = \langle a_{ik} \rangle \{\xi^k\} \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.138)$$

$$\psi_i = d_{i0} + d_{i1} \frac{x}{l} + d_{i2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + d_{i3} \left(\frac{x}{l}\right)^3 = \langle d_{ik} \rangle \{\xi^k\} \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (2.139)$$

gdje su $\langle a_{ik} \rangle$ i $\langle d_{ik} \rangle$ nepoznati koeficijenti polinoma koji se određuju ispunjavanjem rubnih uvjeta za funkcije oblika, dok je ξ bezdimenzionalna koordinata. Ostale funkcije oblika mogu se izraziti kao:

$$\varphi_i = \frac{dw_i}{dx} = \frac{1}{l} \left(a_{i1} + 2a_{i2} \frac{x}{l} + 3a_{i3} \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right) = \langle a_{ik}^{(1)} \rangle \{\xi^k\} \quad (2.140)$$

$$\langle a_{ik}^{(1)} \rangle = \frac{1}{l} \langle a_{i1} \ 2a_{i2} \ 3a_{i3} \ 0 \rangle \quad (2.141)$$

$$y_i = \alpha \langle a_{ik} \rangle \{ \xi^k \} - \beta' \langle a_{ik}^{(2)} \rangle \{ \xi^k \} = \langle b_{ik} \rangle \{ \xi^k \} \quad (2.142)$$

$$\langle a_{ik}^{(2)} \rangle = \frac{2}{l^2} \langle a_{i2} \ 3a_{i3} \ 0 \ 0 \rangle \quad (2.143)$$

$$\langle b_{ik} \rangle = \alpha \langle a_{ik} \rangle - \beta' \langle a_{ik}^{(2)} \rangle \quad (2.144)$$

$$v_i = y_i - w_i = (\alpha - 1) \langle a_{ik} \rangle \{ \xi^k \} - \beta' \langle a_{ik}^{(2)} \rangle \{ \xi^k \} = \langle c_{ik} \rangle \{ \xi^k \} \quad (2.145)$$

$$\langle c_{ik} \rangle = (\alpha - 1) \langle a_{ik} \rangle - \beta' \langle a_{ik}^{(2)} \rangle \quad (2.146)$$

$$g_i = \frac{d\psi_i}{dx} = \frac{1}{l} \left(d_{i1} + 2d_{i2} \frac{x}{l} + 3d_{i3} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right) = \langle d_{ik}^{(1)} \rangle \{ \xi^k \} \quad (2.147)$$

$$\langle d_{ik}^{(1)} \rangle = \frac{1}{l} \langle d_{i1} \ 2d_{i2} \ 3d_{i3} \ 0 \rangle. \quad (2.148)$$

Savijanje:

Ukoliko se pomaci savijanja (ukupni progib y i kut zakreta φ) na krajevima konačnog elementa iskazuju izvedenim izrazima za pomake unutar konačnog elementa (2.140) i (2.142), dobiva se:

$$x = 0: y_i(0) = \alpha a_{i0} - \beta' \frac{2}{l^2} a_{i2} \quad (2.149)$$

$$\varphi_i(0) = \frac{1}{l} a_{i1} \quad (2.150)$$

$$x = l: y_i(l) = \alpha (a_{i0} + a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) - \beta' \frac{2}{l^2} (a_{i2} + 3a_{i3}) \quad (2.151)$$

$$\varphi_i(l) = \frac{1}{l} (a_{i1} + 2a_{i2} + 3a_{i3}), \quad (2.152)$$

odnosno, uz:

$$\beta = \frac{2}{l^2} \beta', \quad (2.153)$$

u matičnom obliku:

$$\{U_i\} = [B_{sav}] \{a_{ik}\}, \quad (2.154)$$

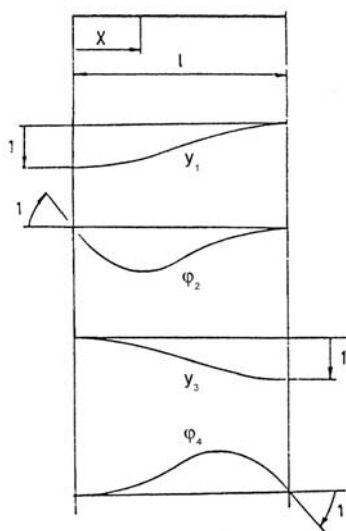
gdje je:

$$[B_{sav}] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha - \beta & \alpha - 3\beta \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l} \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

matrica faktora uz koeficijente a_{ik} , a:

$$\{a_{ik}\} = \begin{Bmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{Bmatrix} \quad (2.156)$$

vektor koeficijenata za i-tu funkciju oblika.



Slika 2.8 Funkcije oblika grednoga konačnog elementa trupa [48]

Nepoznati koeficijenti svakog od polinoma (funkcija oblika) mogu se odrediti naizmjeničnim izjednačavanjem jednog od rubnih pomaka s jediničnom i ostalih s nulom vrijednošću, slika 2.8:

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [B_{sav}]\{a_{ik}\} \quad (2.157)$$

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [B_{sav}] \{a_{2k}\} \quad (2.158)$$

$$\{U_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = [B_{sav}] \{a_{3k}\} \quad (2.159)$$

$$\{U_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = [B_{sav}] \{a_{4k}\}. \quad (2.160)$$

Rješavanjem svakog od ova četiri sustava četiri jednadžbe s četiri nepoznanice, dobivaju se koeficijenti $a_{1k} - a_{4k}$. Sva se četiri sustava mogu spojiti u jedan veći:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B_{sav}] \begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{bmatrix}, \quad (2.161)$$

odnosno, u skraćenom obliku:

$$[I] = [B_{sav}] [a_{ik}]^T, \quad (2.162)$$

gdje je $[I]$ jedinična matrica, a $[a_{ik}]$ kvadratna matrica s nepoznatim koeficijentima. Iz posljednje se jednadžbe dolazi do izraza za matricu nepoznatih koeficijenata funkcija oblika:

$$[a_{ik}]^T = [B_{sav}]^{-1}, \quad (2.163)$$

čijim se rješavanjem dobiva [50]:

$$[a_{ik}] = \frac{1}{1+12\beta} \begin{bmatrix} 1+6\beta & 0 & -3 & 2 \\ -4\beta(1+3\beta)l & (1+12\beta)l & -2(1+3\beta)l & l \\ 6\beta & 0 & 3 & -2 \\ -2\beta(1-6\beta)l & 0 & -(1-6\beta)l & l \end{bmatrix}. \quad (2.164)$$

Uvijanje:

Analogno postupku kod savijanja, pomaci uvijanja (kut uvijanja ψ i prirast kuta uvijanja ϑ) na krajevima elementa mogu se prikazati izrazima (2.139) i (2.147) za pomake unutar konačnog elementa:

$$x = 0 : \psi_i(0) = d_{i0} \quad (2.165)$$

$$\mathcal{G}_i(0) = \frac{1}{l} d_{i1} \quad (2.166)$$

$$x = l : \psi_i(l) = d_{i0} + d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} \quad (2.167)$$

$$\mathcal{G}_i(l) = \frac{1}{l} (d_{i1} + 2d_{i2} + 3d_{i3}), \quad (2.168)$$

što u matičnom obliku glasi:

$$\{V_i\} = [B_{tor}] \{d_{ik}\}, \quad (2.169)$$

gdje je:

$$[B_{tor}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l} \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

matrica faktora uz koeficijente d_{ik} , a:

$$\{d_{ik}\} = \begin{Bmatrix} d_{i0} \\ d_{i1} \\ d_{i2} \\ d_{i3} \end{Bmatrix} \quad (2.171)$$

vektor koeficijenata za i-tu funkciju oblika. Postavljanjem matične jednadžbe ekvivalentne onoj (2.162) kod savijanja dobiva se:

$$[I] = [B_{tor}] [d_{ik}]^T, \quad (2.172)$$

odakle slijedi izraz za matricu nepoznatih koeficijenata funkcija oblika uvijanja:

$$[d_{ik}]^T = [B_{tor}]^{-1}. \quad (2.173)$$

Usporedba matrica (2.155) i (2.170) pokazuje da su one identične u slučaju kada je $\alpha=1$ i $\beta=0$, tako da se matrica $[d_{ik}]$ može lako odrediti iz već poznate matrice (2.164):

$$[d_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & l & -2l & l \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -l & l \end{bmatrix}. \quad (2.174)$$

Minimiziranje ukupne energije:

Matrična jednadžba konačnog elementa dobiva se iz uvjeta minimuma ukupne energije. Uvrštavanjem pomaka unutar elemenata izraženih preko čvornih pomaka, (2.126) – (2.129), u izraz za totalnu energiju konačnog elementa (2.125), slijedi:

$$\begin{aligned}
 E_{tot} = & \frac{1}{2} EI \int_0^l \left[\left\langle \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right\rangle \{U_i\} \right]^2 dx + \frac{1}{2} GF \int_0^l \left[\left\langle \frac{dv_i}{dx} \right\rangle \{U_i\} \right]^2 dx + \frac{1}{2} GI_t \int_0^l \left[\left\langle \frac{d\psi_i}{dx} \right\rangle \{V_i\} \right]^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} EI_w \int_0^l \left[\left\langle \frac{d^2 \psi_i}{dx^2} \right\rangle \{V_i\} \right]^2 dx - \frac{\lambda^2 m}{2} \int_0^l [\langle y_i \rangle \{U_i\}]^2 dx - \lambda^2 m z \int_0^l [\langle y_i \rangle \{U_i\} \langle \psi_i \rangle \{V_i\}] dx - \\
 & - \frac{\lambda^2 J_b}{2} \int_0^l \left[\left\langle \frac{dw_i}{dx} \right\rangle \{U_i\} \right]^2 dx - \frac{\lambda^2 J_m^*}{2} \int_0^l [\langle \psi_i \rangle \{V_i\}]^2 dx - \int_0^l q_x \langle y_i \rangle \{U_i\} dx - \\
 & - \int_0^l \mu_x \left\langle \frac{dy_i}{dx} \right\rangle \{U_i\} dx - \int_0^l \mu_{tx} \langle \psi_i \rangle \{V_i\} dx - \\
 & - \left(Q \langle y_i \rangle \{U_i\} - M \left\langle \frac{\partial w_i}{\partial x} \right\rangle \{U_i\} + M_t \langle \psi_i \rangle \{V_i\} + T \left\langle \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right\rangle \{V_i\} \right)_0^l. \quad (2.175)
 \end{aligned}$$

Iz uvjeta minimuma totalne energije po pojedinom nepoznatom čvornom pomaku savijanja dobivaju se četiri linearne jednadžbe sljedećeg oblika:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{tot}}{\partial U_j} = 0: & \quad 2 \cdot \frac{1}{2} EI \int_0^l \left\langle \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right\rangle \{U_i\} dx \cdot \left\langle \frac{d^2 w_j}{dx^2} \right\rangle + 2 \cdot \frac{1}{2} GF \int_0^l \left\langle \frac{dv_i}{dx} \right\rangle \{U_i\} dx \cdot \left\langle \frac{dv_j}{dx} \right\rangle - \\
 & - 2 \cdot \frac{\lambda^2 m}{2} \int_0^l \langle y_i \rangle \{U_i\} dx \cdot \langle y_j \rangle - 2 \cdot \frac{\lambda^2 J_b}{2} \int_0^l \left\langle \frac{dw_i}{dx} \right\rangle \{U_i\} dx \cdot \left\langle \frac{dw_j}{dx} \right\rangle - \lambda^2 m z \int_0^l \langle \psi_i \rangle \{V_i\} dx \cdot \langle y_j \rangle = \\
 & = \int_0^l q_x \langle y_j \rangle dx + \int_0^l \mu_x \left\langle \frac{dy_j}{dx} \right\rangle dx + \left(Q \langle y_j \rangle - M \left\langle \frac{dw_j}{dx} \right\rangle \right)_0^l \quad j = 1, \dots, 4, \quad (2.176)
 \end{aligned}$$

što, nakon sređivanja, daje:

$$\begin{aligned}
 EI \int_0^l \left\langle \frac{d^2 w_i}{dx^2} \frac{d^2 w_j}{dx^2} \right\rangle \{U_i\} dx + GF \int_0^l \left\langle \frac{dv_i}{dx} \frac{dv_j}{dx} \right\rangle \{U_i\} dx - \lambda^2 m \int_0^l \langle y_i y_j \rangle \{U_i\} dx - \\
 - \lambda^2 J_b \int_0^l \left\langle \frac{dw_i}{dx} \frac{dw_j}{dx} \right\rangle \{U_i\} dx - \lambda^2 m z \int_0^l \langle \psi_i y_j \rangle \{V_i\} dx = \int_0^l q_x \langle y_j \rangle dx + \int_0^l \mu_x \left\langle \frac{dy_j}{dx} \right\rangle dx +
 \end{aligned}$$

$$+ \left(Q(l)y_j(l) - M(l)\frac{dw_j(l)}{dx} - Q(0)y_j(0) + M(0)\frac{dw_j(0)}{dx} \right)_0^l \quad j = 1, \dots, 4. \quad (2.177)$$

Sustav gornjih jednažbi glasi:

$$\begin{aligned} & \left(EI \int_0^l \frac{d^2 w_i}{dx^2} \frac{d^2 w_j}{dx^2} dx + GF \int_0^l \frac{dv_i}{dx} \frac{dv_j}{dx} dx - \lambda^2 m \int_0^l y_i y_j dx - \lambda^2 J_b \int_0^l \frac{dw_i}{dx} \frac{dw_j}{dx} dx \right) \{U_i\} - \\ & - \lambda^2 m z \int_0^l \psi_i y_j dx \{V_i\} = \int_0^l q_x y_j dx + \int_0^l \mu_x \frac{dy_j}{dx} dx + \\ & + \left(Q(l)y_j(l) - M(l)\frac{dw_j(l)}{dx} - Q(0)y_j(0) + M(0)\frac{dw_j(0)}{dx} \right)_0^l, \end{aligned} \quad (2.178)$$

odnosno, u matričnom obliku:

$$([k_{bs}] - \lambda^2 [m_{bs}]) \{U_i\} - \lambda^2 [m_{st}] \{V_i\} = [u_j]_i \{S\}_i + \{q\}_i, \quad (2.179)$$

gdje je:

$$[k_{bs}] = \left[EI \int_0^l \frac{d^2 w_i}{dx^2} \frac{d^2 w_j}{dx^2} dx + GF \int_0^l \frac{dv_i}{dx} \frac{dv_j}{dx} dx \right] \quad (2.180)$$

savojno-smična matrica krutosti,

$$[m_{bs}] = \left[m \int_0^l y_i y_j dx + J_b \int_0^l \frac{dw_i}{dx} \frac{dw_j}{dx} dx \right] \quad (2.181)$$

savojno-smična matrica masa,

$$[m_{st}] = \left[m z \int_0^l \psi_i y_j dx \right] \quad (2.182)$$

smično-torzijska matrica masa,

$$[u_j]_i = \left[\left\langle y_j(0), \frac{dw_j(0)}{dx}, y_j(l), \frac{dw_j(l)}{dx} \right\rangle_i \right] = [I]$$

jedinična matrica,

$$\{S\}_i = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ M(0) \\ Q(l) \\ -M(l) \end{Bmatrix} \quad (2.183)$$

vektor čvornih sila, a:

$$\{q\}_1 = \int_0^l q_x y_j dx + \int_0^l \mu_x \frac{dy_j}{dx} dx \quad (2.184)$$

vektor vanjskog opterećenja.

Analogno tome, iz uvjeta minimuma totalne energije po pojedinom nepoznatom čvornom pomaku uvijanja dobivaju se četiri linearne jednadžbe oblika:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{tot}}{\partial V_j} = 0: & 2 \cdot \frac{1}{2} GI_t \int_0^l \left\langle \frac{d\psi_i}{dx} \right\rangle \{V_i\} dx \cdot \left\langle \frac{d\psi_j}{dx} \right\rangle + 2 \cdot \frac{1}{2} EI_w \int_0^l \left\langle \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \right\rangle \{V_i\} dx \cdot \left\langle \frac{d^2\psi_j}{dx^2} \right\rangle - \\ & - 2 \cdot \frac{\lambda^2 J_m^*}{2} \int_0^l \langle \psi_i \rangle \{V_i\} dx \cdot \langle \psi_j \rangle - \lambda^2 m z \int_0^l \langle y_i \rangle \{U_i\} dx \cdot \langle \psi_j \rangle = \\ & = \int_0^l \mu_{\alpha} \langle \psi_j \rangle dx + \left(M_t \langle \psi_j \rangle + T \left\langle \frac{d\psi_j}{dx} \right\rangle \right) \Big|_0^l \quad j = 1, \dots, 4, \end{aligned} \quad (2.185)$$

odnosno, nakon sređivanja:

$$\begin{aligned} GI_t \int_0^l \left\langle \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} \right\rangle \{V_i\} dx + EI_w \int_0^l \left\langle \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \frac{d^2\psi_j}{dx^2} \right\rangle \{V_i\} dx - \lambda^2 J_m^* \int_0^l \langle \psi_i \psi_j \rangle \{V_i\} dx - \\ - \lambda^2 m z \int_0^l \langle y_i \psi_j \rangle \{U_i\} dx = \int_0^l \mu_{\alpha} \langle \psi_j \rangle dx + \\ + \left(M_t(l) \psi_j(l) + T(l) \frac{d\psi_j(l)}{dx} - M_t(0) \psi_j(0) - T(0) \frac{d\psi_j(0)}{dx} \right) \Big|_0^l \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (2.186)$$

Sustav gornjih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \left(GI_t \int_0^l \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx + EI_w \int_0^l \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \frac{d^2\psi_j}{dx^2} dx - \lambda^2 J_m^* \int_0^l \psi_i \psi_j dx \right) \{V_i\} - \lambda^2 m z \int_0^l y_i \psi_j dx \{U_i\} = \\ = \int_0^l \mu_{\alpha} \psi_j dx + \left(M_t(l) \psi_j(l) + T(l) \frac{d\psi_j(l)}{dx} - M_t(0) \psi_j(0) - T(0) \frac{d\psi_j(0)}{dx} \right) \Big|_0^l, \end{aligned} \quad (2.187)$$

može se prikazati i u matričnom obliku:

$$([k_{rw}] - \lambda^2 [m_{rw}]) \{V_i\} - \lambda^2 [m_{ts}] \{U_i\} = \{v_j\}_i \{S\}_2 + \{q\}_2, \quad (2.188)$$

gdje je:

$$[k_{rw}] = \left[GI_t \int_0^l \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx + EI_w \int_0^l \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \frac{d^2\psi_j}{dx^2} dx \right] \quad (2.189)$$

matrica krutosti torzija-vitperenje,

$$[m_{tw}] = \left[J_m^* \int_0^l \psi_i \psi_j dx \right] \quad (2.190)$$

matrica masa torzija-vitperenje,

$$[m_{ts}] = \left[mz \int_0^l y_i \psi_j dx \right] = [m_{st}]^T \quad (2.191)$$

torzijsko-smična matrica masa,

$$[\langle v_j \rangle_i] = \left[\left\langle \psi_j(0), \frac{d\psi_j(0)}{dx}, \psi_j(l), \frac{d\psi_j(l)}{dx} \right\rangle_i \right] = [I]$$

jedinična matrica,

$$\{S\}_2 = \begin{Bmatrix} -M_t(0) \\ -T(0) \\ M_t(l) \\ T(l) \end{Bmatrix} \quad (2.192)$$

vektor čvornih sila, a:

$$\{q\}_2 = \int_0^l \mu_{tx} \psi_j dx \quad (2.193)$$

vektor vanjskog opterećenja.

Sprezanjem sustavâ (2.179) i (2.188) u jedan veći, dobiva se jednadžba konačnog elementa za spregnute horizontalne i torzijske vibracije:

$$\{f\} = [k]\{\delta\} - \{q\}, \quad (2.194)$$

gdje je:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \{S\}_1 \\ \{S\}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ M(0) \\ Q(l) \\ -M(l) \\ -M_t(0) \\ -T(0) \\ M_t(l) \\ T(l) \end{Bmatrix} \quad (2.195)$$

vektor čvornih sila,

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{bs} & 0 \\ 0 & k_{tw} \end{bmatrix} - \lambda^2 \begin{bmatrix} m_{bs} & m_{st} \\ m_{ts} & m_{tw} \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

generalizirana matrica krutosti,

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{W\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y(0) \\ \varphi(0) \\ y(l) \\ \varphi(l) \\ \psi(0) \\ \vartheta(0) \\ \psi(l) \\ \vartheta(l) \end{Bmatrix} \quad (2.197)$$

vektor čvornih pomaka, a:

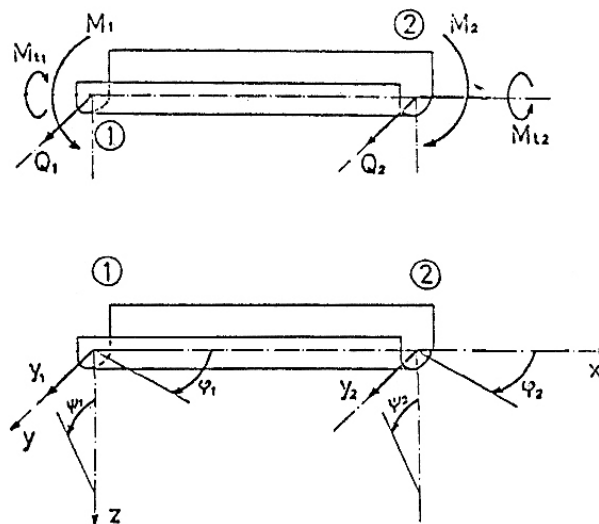
$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{q\}_1 \\ \{q\}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.198)$$

vektor čvornog opterećenja.

Iz jednačbe (2.196) vidljivo je da se sprega između horizontalnog savijanja i uvijanja ostvaruje samo preko matrice masa. Detaljan oblik podmatrica generalizirane matrice krutosti i vektora čvornog opterećenja konačnog elementa donosi prilog 1.

2.6.5.2. Konačni element za dijelove broskog trupa zatvorenog presjeka

Dijelovi trupa zatvorenog poprečnog presjeka posjeduju veliku krutost na uvijanje pa se vitoperenje stoga može zanemariti odabiranjem konačnog elementa sa šest stupnjeva slobode (slika 2.9):



Slika 2.9 Gredni konačni element sa šest stupnjeva slobode [49]

Uvijanje:

Budući da je dio koji se odnosi na savijanje analogan onom izvedenom u prethodnom odjeljku, u nastavku će se razmatrati samo uvijanje. S obzirom na to da vektor čvornih pomaka uvijanja:

$$\{V_i\} = \begin{Bmatrix} \psi_0 \\ \psi_l \end{Bmatrix}_i \quad (2.199)$$

ima samo dva člana, za opisivanje elastične linije uvijanja (2.128):

$$\psi = \langle \psi_i \rangle \{V_i\},$$

umjesto izraza (2.139), dostatno je koristiti funkcije oblika kuta uvijanja u obliku polinoma prvog stupnja:

$$\psi_i = e_{i0} + e_{i1} \frac{x}{l} = \langle e_{ik} \rangle \{\xi^k\} \quad k = 0, 1. \quad (2.200)$$

Kut uvijanja na krajevima elementa:

$$x = 0: \psi_i(0) = e_{i0} \quad (2.201)$$

$$x = l: \psi_i(l) = e_{i0} + e_{i1} \quad (2.202)$$

odnosno, u matričnom obliku:

$$\{V_i\} = [B_{tor}] \{e_{ik}\}, \quad (2.203)$$

gdje je:

$$[B_{tor}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

matrica faktora uz koeficijente e_{ik} . Primjenom izraza ekvivalentnog onom (2.173) dobiva se izraz za matricu nepoznatih koeficijenata funkcija oblika uvijanja:

$$[e_{ik}]^T = [B_{tor}]^{-1}, \quad (2.205)$$

odakle proizlazi:

$$[e_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.206)$$

Analogno postupku kod konačnog elementa trupa otvorenog poprečnog presjeka, iz uvjeta minimuma ukupne potencijalne energije elementa, dolazi se do identičnog dijela matrične jednadžbe elementa koji se odnosi na uvijanje (2.188):

$$([k_{tw}] - \lambda^2 [m_{tw}]) \{V_i\} - \lambda^2 [m_{ts}] \{U_i\} = \langle \{v_j\}_i \rangle \{S\}_2 + \{q\}_2,$$

gdje je vektor čvornih pomaka sada zadan izrazom (2.199), dok vektor čvornih sila ima samo dva elementa:

$$\{S\}_2 = \begin{Bmatrix} -M_t(0) \\ M_t(l) \end{Bmatrix}. \quad (2.207)$$

2.6.6. Matrična jednadžba brodskog trupa

2.6.6.1. Transformacija konačnih elemenata

Prije sastavljanja pojedinačnih konačnih elemenata u globalni model, potrebno je izvršiti određene transformacije. Iz jednadžbi konačnog elementa vidljivo je da su matrice i vektori posloženi tako da nakon elemenata koji se odnose na horizontalno savijanje dolaze oni povezani s uvijanjem. Daljnji postupak jednostavniji je u slučaju izmjene tog poretka na način da članove koji se odnose na prvi čvor grednoga konačnog elementa slijede oni koji se odnose na njegov drugi čvor.

Kod konačnog elementa trupa otvorenog presjeka potrebno je zamijeniti elemente vektora $\{f\}$, $\{\delta\}$ i $\{q\}$ prema sljedećoj shemi:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix},$$

dok je u matricama zamjenu potrebno izvršiti po recima i stupcima na način:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 15 & 16 & 13 & 14 & 17 & 18 \\ 21 & 22 & 25 & 26 & 23 & 24 & 27 & 28 \\ 51 & 52 & 55 & 56 & 53 & 54 & 57 & 58 \\ 61 & 62 & 65 & 66 & 63 & 64 & 67 & 68 \\ 31 & 32 & 35 & 36 & 33 & 34 & 37 & 38 \\ 41 & 42 & 45 & 46 & 43 & 44 & 47 & 48 \\ 71 & 72 & 75 & 76 & 73 & 74 & 77 & 78 \\ 81 & 82 & 85 & 86 & 83 & 84 & 87 & 88 \end{bmatrix},$$

tako da se, na primjer, dobiva:

$$\{\tilde{\delta}\} = \begin{Bmatrix} y(0) \\ \varphi(0) \\ \psi(0) \\ \vartheta(0) \\ y(l) \\ \varphi(l) \\ \psi(l) \\ \vartheta(l) \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{f}\} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ M(0) \\ -M_t(0) \\ -T(0) \\ Q(l) \\ -M(l) \\ M_t(l) \\ T(l) \end{Bmatrix}. \quad (2.208)$$

Slično tome, u slučaju elementa trupa zatvorenog presjeka, vektori se preslaguju u sljedeći oblik:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{Bmatrix},$$

a zamjena odgovarajućih redaka i stupaca rezultira matricama oblika:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 15 & 13 & 14 & 16 \\ 21 & 22 & 25 & 23 & 24 & 26 \\ 51 & 52 & 55 & 53 & 54 & 56 \\ 31 & 32 & 35 & 33 & 34 & 36 \\ 41 & 42 & 45 & 43 & 44 & 46 \\ 61 & 62 & 65 & 63 & 64 & 66 \end{bmatrix}.$$

Rezultantni vektori čvornih pomaka i sila glase:

$$\{\tilde{\delta}\} = \begin{Bmatrix} y(0) \\ \varphi(0) \\ \psi(0) \\ y(l) \\ \varphi(l) \\ \psi(l) \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{f}\} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ M(0) \\ -M_t(0) \\ Q(l) \\ -M(l) \\ M_t(l) \end{Bmatrix}. \quad (2.209)$$

Uobičajeno je karakteristike svakog pojedinoga konačnog elementa zadavati s obzirom na njegov lokalni koordinatni sustav. Stoga je, prije sklapanja u cjelinu, potrebno matričnu jednadžbu elementa prilagoditi globalnom koordinatnom sustavu.

Budući da se neki pomaci konačnog elementa izražavaju s obzirom na centar torzije z_D , čiji se vertikalni položaj mijenja duž trupa, potrebno ih je zadati u odnosu na neku zajedničku razinu – vertikalni položaj težišta sustava z_G , na primjer. Kut zakreta presjeka, kut

uvijanja i njegov prirast ne ovise o z_D , tako da je potrebno izmijeniti samo ukupni progib horizontalnog savijanja (iz y u \bar{y}):

$$y = \bar{y} + (z_D - z_G) \bar{\psi}. \quad (2.210)$$

Izvorni vektor pomaka u čvorovima:

$$\{\tilde{\delta}\} = [\tilde{T}] \{\bar{\delta}\}, \quad (2.211)$$

gdje je:

$$[\tilde{T}] = \begin{bmatrix} [T] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_D - z_G & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.212)$$

matrica transformacije.

Uvrštavanjem izraza (2.211) u jednadžbu (2.194):

$$\{\tilde{f}\} = [\tilde{k}] \{\tilde{\delta}\} - \{\tilde{q}\},$$

proizlazi:

$$\{\tilde{f}\} = [\tilde{k}] [\tilde{T}] \{\bar{\delta}\} - \{\tilde{q}\}. \quad (2.213)$$

Nakon množenja s $[\tilde{T}]^T$ slijeva dobiva se:

$$[\tilde{T}]^T \{\tilde{f}\} = [\tilde{T}]^T [\tilde{k}] [\tilde{T}] \{\bar{\delta}\} - [\tilde{T}]^T \{\tilde{q}\}, \quad (2.214)$$

odnosno:

$$\{\bar{f}\} = [\bar{k}] \{\bar{\delta}\} - \{\bar{q}\}, \quad (2.215)$$

gdje je:

$$\{\bar{f}\} = [\tilde{T}]^T \{\tilde{f}\} \quad (2.216)$$

$$[\bar{k}] = [\tilde{T}]^T [\tilde{k}] [\tilde{T}] \quad (2.217)$$

$$\{\bar{q}\} = [\tilde{T}]^T \{\tilde{q}\}. \quad (2.218)$$

2.6.6.2. Sklapanje matrične jednadžbe trupa

Prilikom spajanja elemenata u globalni model potrebno je zadovoljiti rubne uvjete na krajevima broskog trupa, modeliranog slobodnim nosačem promjenljivih značajki:

$$\begin{aligned}
& -Q^1(0) = 0 & Q^n(l) = 0 \\
x = 0: & M^1(0) = 0 & x = L: -M^n(l) = 0, \\
& -M_t^1(0) = 0 & M_t^n(l) = 0
\end{aligned} \tag{2.219}$$

jednako kao i uvjete ravnoteže sila i kompatibilnosti pomaka na spojevima elemenata:

$$\begin{aligned}
Q^{i-1}(l) &= Q^i(0) & y^{i-1}(l) &= y^i(0) = y^{i-1,i} \\
M^{i-1}(l) &= M^i(0) & \varphi^{i-1}(l) &= \varphi^i(0) = \varphi^{i-1,i} \\
M_t^{i-1}(l) &= M_t^i(0), & \psi^{i-1}(l) &= \psi^i(0) = \psi^{i-1,i} \\
(T^{i-1}(l) &= T^i(0)) & (g^{i-1}(l) &= g^i(0) = g^{i-1,i})
\end{aligned} \tag{2.220}$$

Sprezanjem (transformiranih) matrice jednadžbi (2.215) svih konačnih elemenata dobiva se:

$$\sum_{i=1}^n \{\tilde{f}\}_i = \sum_{i=1}^n \left[\tilde{k} \right] \{\tilde{\delta}\}_i - \{\tilde{q}\}_i, \tag{2.221}$$

što, nakon sređivanja, daje matricnu jednadžbu sustava:

$$\{F\} = [K^*] \{D\} - \{Q\}, \tag{2.222}$$

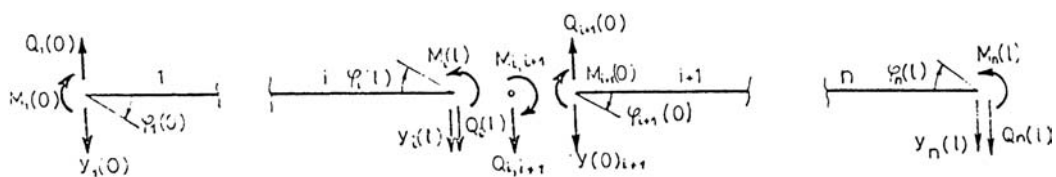
gdje je:

$$\{D\} = \left\{ \begin{array}{c} y^{0,1} \\ \varphi^{0,1} \\ \psi^{0,1} \\ (g^{0,1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{i-1,i} \\ \varphi^{i-1,i} \\ \psi^{i-1,i} \\ (g^{i-1,i}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{n,n+i} \\ \varphi^{n,n+i} \\ \psi^{n,n+i} \\ (g^{n,n+i}) \end{array} \right\},$$

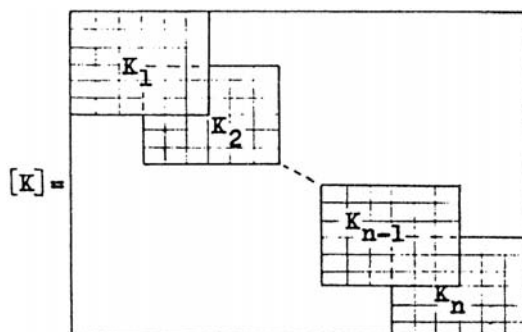
vektor pomaka u čvorovima globalnog modela, a:

$$\{F\} + \{Q\} = \begin{Bmatrix} f^{0,1} \\ f^{0,2} \\ f^{0,3} \\ (f^{0,4}) \\ f^{0,5} + f^{1,1} \\ f^{0,6} + f^{1,2} \\ f^{0,7} + f^{1,3} \\ (f^{0,8} + f^{1,4}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f^{n-1,5} + f^{n,1} \\ f^{n-1,6} + f^{n,2} \\ f^{n-1,7} + f^{n,3} \\ (f^{n-1,8} + f^{n,4}) \\ f^{n,5} \\ f^{n,6} \\ f^{n,7} \\ (f^{n,8}) \end{Bmatrix},$$

vektor čvornih opterećenja, dok je $[K^*]$ generalizirana matrica krutosti koja se dobiva slaganjem matrica krutosti pojedinih elemenata, slika 2.11.



Slika 2.10 Uvjeti ravnoteže sila i kompatibilnosti pomaka na spojevima [48]



Slika 2.11 Generalizirana matrica krutosti globalnog modela [48]

Globalni model kontejnerskog broda uključuje konačne elemente trupa i otvorenog i zatvorenog presjeka, tako da je posebnu pažnju potrebno posvetiti mjestima na kojima se spajaju elementi različite vrste.

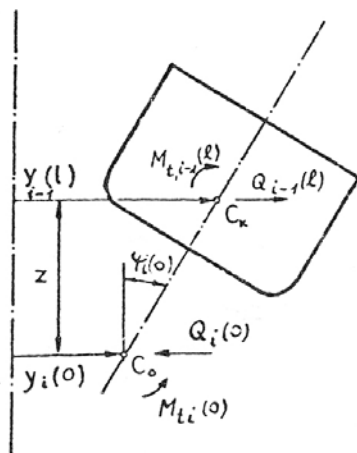
Prelaz s konačnog elementa trupa zatvorenog presjeka na element otvorenog presjeka:

Zbog zanemarenog vitoperenja u prvom čvoru, ovaj će konačni element imati sedam stupnjeva slobode:

$$\{\tilde{\delta}\} = \begin{Bmatrix} y(0) \\ \varphi(0) \\ \psi(0) \\ y(l) \\ \varphi(l) \\ \psi(l) \\ g(l) \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{f}\} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ M(0) \\ -M_t(0) \\ Q(l) \\ -M(l) \\ M_t(l) \\ T(l) \end{Bmatrix}. \quad (2.223)$$

Uvjeti ravnoteže sila i kompatibilnosti pomaka na mjestu spoja:

$$\begin{aligned} Q^{i-1}(l) - Q^i(0) &= 0 & y^{i-1}(l) - y^i(0) + z\psi^i(0) &= 0 \\ M^{i-1}(l) - M^i(0) &= 0 & \varphi^{i-1}(l) - \varphi^i(0) &= 0 \\ M_t^{i-1}(l) - M_t^i(0) + zQ^i(0) &= 0' & \psi^{i-1}(l) - \psi^i(0) &= 0 \\ T^i(0) &= 0 & g^i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.224)$$



Slika 2.12 Prelaz s konačnog elementa zatvorenog na element otvorenog presjeka [51]

Usporedba uvjeta kompatibilnosti ukupnog progiba savijanja:

$$y^{i-1}(l) = y^i(0) - z\psi^i(0)$$

s izrazom (2.210):

$$y = \bar{y} + (z_D - z_G) \overline{\psi},$$

pokazuje da se opet mogu koristiti isti izrazi za transformaciju koordinata jednadžbe konačnog elementa, uz:

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.225)$$

gdje je:

$$z = |z_D^o - z_D^z|, \quad (2.226)$$

udaljenost centra torzije otvorenog i zatvorenog presjeka.

Potrebno je napomenuti i da, prilikom transformacije jednadžbe konačnog elementa prije sklapanja globalnog modela trupa, treba voditi računa o tome da je progib horizontalnog savijanja prvog čvora izražen s obzirom na centar deformiranja zatvorenog poprečnog presjeka, tako da u jednadžbi (2.210):

$$y = \bar{y} + (z_D - z_G) \overline{\psi},$$

treba uzeti da je:

$$z_D = z_D^z, \quad (2.227)$$

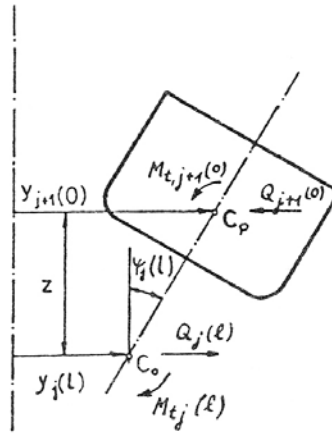
dok za drugi čvor vrijedi:

$$z_D = z_D^o. \quad (2.228)$$

Prelaz s konačnog elementa trupa otvorenog presjeka na element zatvorenog presjeka:

Vitoperenje je zanemareno u drugom čvoru, tako da i ovaj konačni element ima sedam stupnjeva slobode:

$$\{\tilde{\delta}\} = \begin{Bmatrix} y(0) \\ \varphi(0) \\ \psi(0) \\ \vartheta(0) \\ y(l) \\ \varphi(l) \\ \psi(l) \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{f}\} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ M(0) \\ -M_t(0) \\ -T(0) \\ Q(l) \\ -M(l) \\ M_t(l) \end{Bmatrix}. \quad (2.229)$$



Slika 2.13 Prelaz s konačnog elementa otvorenog na element zatvorenog presjeka [51]

Uvjeti ravnoteže sila i kompatibilnosti pomaka:

$$\begin{aligned}
 Q^j(l) - Q^{j+1}(0) &= 0 & y^j(l) - y^{j+1}(0) + z\psi^j(0) &= 0 \\
 M^j(l) - M^{j+1}(0) &= 0 & \varphi^j(l) - \varphi^{j+1}(0) &= 0 \\
 M_t^j(l) - M_t^{j+1}(0) - zQ^{j+1}(0) &= 0 & \psi^j(l) - \psi^{j+1}(0) &= 0 \\
 T^j(0) &= 0 & g^j(0) &= 0
 \end{aligned} \quad (2.230)$$

Iz uvjeta kompatibilnosti ukupnog progiba horizontalnog savijanja:

$$y^j(l) = y^{j+1}(0) - z\psi^{j+1}(0)$$

vidljivo je da se ponovno mogu koristiti iste jednadžbe za transformaciju koordinata konačnih elemenata, uz:

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.231)$$

Prilikom transformacije ovoga konačnog elementa izrazom (2.210), za prvi čvor koristi se izraz (2.228), a za drugi čvor (2.227).

2.6.7. Rješenje problema slobodnih vibracija

Ukoliko se u matricnoj jednadžbi brodskog trupa (2.222) zanemari opterećenje, dobiva se homogeni sustav linearnih algebarskih jednadžbi:

$$[K^*]\{D\} = \{0\}. \quad (2.232)$$

Netrivijalno rješenje ovog problema svojstvenih vrijednosti (engl. *eigenvalue problem*), za koje je:

$$\{D\} \neq \{0\}, \quad (2.233)$$

zahtijeva da:

$$\det[K^*(\omega)] = 0. \quad (2.234)$$

Razvoj determinante globalizirane matrice krutosti sustava rezultira frekventnom jednadžbom (karakterističnim polinomom stupnja jednakog kvadratu broja stupnjeva slobode sustava), čijim se rješavanjem dobivaju prirodne frekvencije (i pripadajući prirodni oblici) globalnog modela.

Budući da je egzaktno rješavanje takve jednadžbe nemoguće za veliki broj stupnjeva slobode, pribjegava se numeričkim metodama. Ovdje je korištena iterativna metoda traženja determinante linearnim interpoliranjem, kombinirana s određivanjem determinante generalizirane matrice krutosti (u svakom koraku iteracije) Gauss – Jordanovim postupkom (rješavanja homogenog sustava linearnih jednadžbi) s parcijalnim pivotiranjem [44, 45].

3. HIDRODINAMIČKI MODEL

3.1. Osnovni problem rubnih vrijednosti

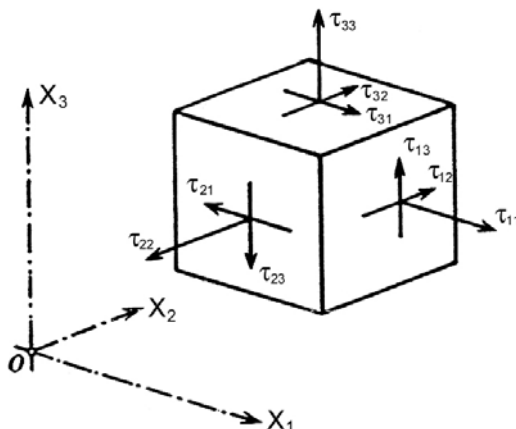
Prvi korak u razvijanju izraza za strujanje fluida definiranje je vektora brzine $\vec{v}(x = x_1, y = x_2, z = x_3; t)$, s komponentama $u = u_1, v = u_2, w = u_3$, kao brzine čestice fluida u točki $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, u inercijskom desnokretnom kartezijskom koordinatnom sustavu $OX_1X_2X_3$, u trenutku t .

Osim toga, definiranjem (simetričnog) tenzora naprezanja drugog reda na elementarnom volumenu, slika 3.1:

$$\tau_{ij} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

te jediničnog vektora normale na proizvoljno orijentiranu površinu, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, moguće je naprezanje na takvoj površini rastaviti na tri ortogonalne komponente:

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$



Slika 3.1 Tenzor naprezanja na elementarnom volumenu

U slučaju da se promatra uvijek ista grupa čestica fluida (odnosno, da se razmatrani volumen fluida $V(t)$ mijenja u vremenu), opravdano je primijeniti fizikalne zakone očuvanja mase i količine gibanja. Prvi od njih zahtijeva da unutar materijalnog volumena nema promjene mase s vremenom [52]:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0. \quad (3.3)$$

Slično tome, zakon o očuvanju količine gibanja propisuje da suma svih sila koje djeluju na volumen fluida mora biti jednaka brzini promjene njegove količine gibanja (odnosno, da sve sile koje djeluju na tijelo trebaju biti u ravnoteži) [52]:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_i dV = \iint_S \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j dS + \iiint_V F_i dV, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

gdje su F_i komponente vanjske masene sile na tijelo.

Na osnovi Gaussovog teorema divergencije [45]:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \quad (3.5a)$$

kada za svaku komponentu vanjske sile vrijedi:

$$\iiint_V \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dV = \iint_S F_i n_i dS, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.5b)$$

slijedi da je:

$$\iint_S \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j dS = \iiint_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.5c)$$

tako da se jednačba (3.4) može prikazati u prikladnijem obliku:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_i dV = \iiint_V \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) dV, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Primjenom transportnog teorema [52]:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S \sum_{i=1}^3 f u_i n_i dS = \iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (f u_i)}{\partial x_i} \right) dV \quad (3.7)$$

na zakon o očuvanju mase, izraz (3.3), dobiva se:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} \right) dV = 0. \quad (3.8)$$

Budući da promatrani volumen može biti sastavljen od proizvoljne grupe čestica fluida, podintegralni izraz mora biti jednak nuli kroz čitav fluid. Na taj se način volumenski integrali iz gornje jednačbe mogu zamijeniti parcijalnom diferencijalnom jednačbom koja se naziva jednačbom kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.9)$$

gdje je ∇ Hamiltonov operator:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{k}.$$

Uz pretpostavku nestlačivosti tekućine, odnosno njene konstantne gustoće, jednačba kontinuiteta prelazi u jednostavniji oblik:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.10)$$

Transportni teorem (3.7) može se primijeniti i na zakon o očuvanju količine gibanja, izraz (3.6):

$$\iiint_V \left[\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} \right] dV = \iiint_V \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) dV, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Ponovno se razmatra proizvoljni volumen fluida, tako da se gornji izraz može zamijeniti parcijalnim diferencijalnim jednačbama koje se nazivaju Eulerovim jednačbama:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.12a)$$

odnosno:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.12b)$$

Lijeva strana gornje jednačbe predstavlja ubrzanje materijalne čestice fluida (brzina čestice u točki ne mijenja se samo s vremenom, već i s promjenom položaja točke):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{D}{Dt} u_i, \quad (3.13)$$

gdje je $\frac{D}{Dt}$ totalna derivacija:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (3.14)$$

tako da Eulerove jednačbe prelaze u sljedeći oblik:

$$\frac{D}{Dt} u_i = \frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.12c)$$

Usvajanje pretpostavke neviskoznog strujanja, kod kojeg se fluid pomiče kao kruto tijelo bez deformiranja, tako da nema viskoznih smičnih sila, dovodi do jednostavnijeg oblika tenzora naprezanja:

$$\tau_{ij} = \begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix} = -p\delta_{ij}, \quad (3.15)$$

gdje je p ukupni tlak, a:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases} \quad (3.15a)$$

Kroeneckerova delta funkcija.

Navier-Stokesove jednađbe za neviskozni fluid dobivaju se uvrštavanjem izraza (3.15) u Eulerove jednađbe (3.12c) [52]:

$$\frac{D}{Dt}u_i = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} - F_i\right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Ukoliko se pretpostavi da se polje vanjskih sila F sastoji samo od gravitacijske sile ρg koja djeluje u negativnom smjeru osi x_3 , dobiva se:

$$\frac{D}{Dt}u_i = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(p + \rho g x_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

Sustav tri nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe (3.17), zajedno s jednađbom kontinuiteta (3.10) i odgovarajućim rubnim uvjetima, opisuje gibanje neviskoznog fluida i moguće ga je riješiti samo za najjednostavnije konfiguracije kod kojih se može zanemariti nelinearni član ubrzanja ($\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ u jednađbi (3.12b)).

Stoga je potrebno uvesti i dodatna pojednostavljenja. Pretpostavi li se nevtložno strujanje fluida [53], sve komponente vektora vrtloženja:

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \quad (3.18)$$

moraju biti jednake nuli kroz čitavo područje fluida:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \\ \omega_2 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0. \\ \omega_3 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

U tom se slučaju vektor brzine \vec{v} može predstaviti skalarnom funkcijom potencijala Φ (koja nema fizikalno značenje, ali olakšava rješavanje matematičkog problema), takvom da je [52, 53, 54, 55]:

$$\vec{v} = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{k}, \quad (3.20a)$$

odnosno

$$u_i = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}. \quad (3.20b)$$

Usvajanjem pretpostavke nevrtložnog strujanja, moguće je integrirati Eulerove jednačbe i dobiti izraz za tlak, poznat pod nazivom Bernoullijevog integrala, odnosno, Bernoullijeve jednačbe [52]. Ukoliko se u Navier-Stokesove jednačbe (3.17) uvrste komponente brzine izražene preko potencijala brzine (3.20b), dobiva se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p + \rho g x_3), \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p + \rho g x_3), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.21a)$$

Uz:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}, \quad (3.22)$$

slijedi:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p + \rho g x_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.21b)$$

Integriranje gornjeg izraza s obzirom na prostorne koordinate x_i daje:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} (p + \rho g x_3) + f(t), \quad (3.23a)$$

gdje je $f(t)$ proizvoljna funkcija vremena, neovisna o prostornim koordinatama, koja se može uključiti u funkciju nekog novog potencijala brzine ϕ_1 jednostavnom transformacijom [52, 56]:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - f(t) = \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}, \quad (3.24a)$$

tako da je:

$$\Phi_1 = \Phi - \int_0^t f(t) dt. \quad (3.24b)$$

Oba ova potencijala jednako su prikladna kao prostorni gradijenti vektora brzine, tako da se $f(t)$ može anulirati, ili postaviti na neku željenu vrijednost tlaka. Ako se odabere:

$$f(t) = \frac{p_0}{\rho}, \quad (3.24c)$$

gdje je p_0 atmosferski tlak, Bernoullijeva jednadžba (3.23a) glasi:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g x_3 + \frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - p_0 = 0, \quad (3.23b)$$

odnosno:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g x_3 + \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right] - p_0 = 0. \quad (3.23c)$$

Uz pretpostavku stacionarnog strujanja, dobiva se još jednostavniji izraz:

$$p + \rho g x_3 + \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right] - p_0 = 0. \quad (3.23d)$$

Tlak se može rastaviti na hidrostatski i hidrodinamički dio:

$$p = p_s + p_d, \quad (3.23e)$$

gdje su:

$$p_s = p_0 - \rho g x_3 \quad (3.23f)$$

$$p_d = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right]. \quad (3.23g)$$

Uvrštavanjem izraza za potencijal brzine (3.20a) u jednadžbu kontinuiteta (3.10) dobiva se dobro poznata Laplaceova jednadžba [52, 53, 54, 55]:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0, \quad (3.25)$$

osnovna diferencijalna jednadžba problema rubnih vrijednosti (engl. *boundary value problem*) za nevtložno (potencijalno) strujanje nestlačive tekućine. Uz nju, potencijal brzine mora zadovoljiti i relevantne kinematičke (koji opisuju brzinu) i dinamičke (koji opisuju sile) rubne uvjete na granicama fluida. Za one granice čiji se položaj i brzina ne mijenjaju u vremenu, dostatno je propisati kinematički rubni uvjet, dok je za ostale potrebno zadati i onaj dinamički [52].

Uvjet nepromočivosti dna oceana oblikuje rubni uvjet po kojem je, uz pretpostavku horizontalnog dna oceana, vertikalna komponenta brzine na dnu jednaka nuli [52, 54, 55, 57]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0 \quad na \quad x_3 = -d. \quad (3.26)$$

Kinematički rubni uvjet na slobodnoj površini, $x_3 = \zeta(x_1, x_2; t)$, gdje je ζ funkcija izdizanja vala, navodi da će čestica koja je u nekom trenutku ležala na slobodnoj površini na njoj i ostati; tako da je totalna derivacija $\frac{D}{Dt}$ razlike položaja (takve) čestice i trenutnog izdizanja površine vala jednaka nuli [54, 57]:

$$\frac{D}{Dt}(x_3 - \zeta) = \frac{\partial}{\partial t}(x_3 - \zeta) + \nabla \Phi \cdot \nabla(x_3 - \zeta) = 0, \quad (3.27a)$$

odnosno:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \quad na \quad x_3 = \zeta. \quad (3.27b)$$

Kako izdizanje površine vala nije unaprijed poznato, nužan je i dinamički rubni uvjet koji propisuje da je tlak na slobodnoj površini jednak atmosferskom. Uz $p=p_0$, iz Bernoullijeve jednadžbe (3.23c):

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p_0 + \rho g x_3 + \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right] - p_0 = 0. \quad (3.28a)$$

slijedi:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right] + g x_3 = 0 \quad na \quad x_3 = \zeta. \quad (3.28b)$$

Osnovni problem rubnih vrijednosti za nevrtložno strujanje nestlačive idealne tekućine čine Laplaceova jednadžba (3.25), rubni uvjet na dnu oceana (3.26) te dva rubna uvjeta na slobodnoj površini (3.27b) i (3.28b). Budući da su posljednje dvije jednadžbe nelinearne te da ih je potrebno zadovoljiti na slobodnoj površini koja se neprestano mijenja, niti ovaj, osnovni problem nije moguće riješiti bez dodatnih pojednostavljenja.

3.2. Teorija linearnih (Airyjevih, harmonijskih) valova

Najuobičajenije približno rješenje, koje daje prihvatljive rezultate za široki spektar problema, temelji se na razvoju funkcija potencijala brzine te izdizanja vala u Taylorove redove potencija malog parametra [54, 55]:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; t) = \varepsilon \Phi^{(1)}(x_1, x_2, x_3; t) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(x_1, x_2, x_3; t) + \dots \quad (3.29)$$

$$\zeta(x_1, x_2, x_3; t) = \varepsilon \zeta^{(1)}(x_1, x_2, x_3; t) + \varepsilon^2 \zeta^{(2)}(x_1, x_2, x_3; t) + \dots, \quad (3.30)$$

gdje je ε bezdimenzionalni nagib vala:

$$\varepsilon = \frac{\pi h}{\lambda}, \quad (3.31)$$

pri čemu je h visina, a λ duljina vala. Izrazi (3.29) i (3.30) vrijede samo u slučaju kada je brzina napredovanja broda jednaka nuli.

Usvajanje pretpostavke o maloj valnoj visini u usporedbi s valnom duljinom i dubinom vode, omogućuje lineariziranje rubnih uvjeta na slobodnoj površini (odbacivanjem svih članova reda višeg od $O(\varepsilon)$), kao i zadovoljavanje tih rubnih uvjeta na srednjoj razini vode, $x_3 = 0$, umjesto na oscilirajućoj slobodnoj površini. U kinematičkom rubnom uvjetu na slobodnoj površini, izraz (3.27b), mogu se zanemariti posljednja dva člana koja predstavljaju male veličine drugog reda [54, 57]:

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_3} - \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t} = 0 \quad na \quad x_3 = 0. \quad (3.32)$$

S obzirom na to da je brzina fluida mala veličina prvog reda, zanemarivanjem njenog kvadrata u jednadžbi (3.28b), dobiva se linearizirani dinamički rubni uvjet na slobodnoj površini:

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + g \zeta^{(1)} = 0 \quad na \quad x_3 = 0. \quad (3.33a)$$

Uklanjanjem nepoznanice ζ_1 , ova se dva rubna uvjeta mogu spregnuti u jedan. Iz posljednje jednadžbe slijedi:

$$\zeta^{(1)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t}, \quad (3.33b)$$

odnosno:

$$\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2}. \quad (3.33c)$$

Uvrštavanjem izraza (3.33c) u jednadžbu (3.32) dobiva se jedinstveni rubni uvjet na slobodnoj površini [54, 57]:

$$g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \quad na \quad x_3 = 0. \quad (3.34)$$

Linearizirani osnovni problem rubnih vrijednosti tvore Laplaceova jednadžba (3.25), uvjet nepromočivosti na dnu oceana (3.26) i jedinstveni rubni uvjet na slobodnoj površini (3.34). Najjednostavnije rješenje takvog problema predstavlja Airyjevi harmonijski val - dvodimenzionalni dugobregoviti progresivni površinski val (duljine λ , visine h , perioda T), slika 3.2, koji napreduje, u smjeru osi X_1 , faznom brzinom:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}, \quad (3.35)$$

gdje je:

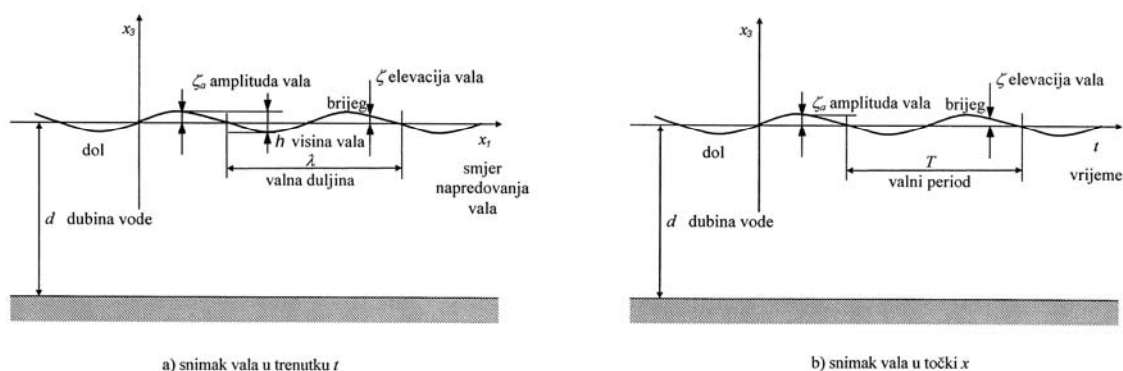
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.36)$$

kružna frekvencija vala, a:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.37)$$

valni broj. Periodičnost takvog vala dana je izrazom:

$$\alpha = x_1 - ct. \quad (3.38)$$



Slika 3.2 Harmonijski progresivni val [57]

Laplaceova jednadžba (3.25) u slučaju takvog vala poprima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_3^2} = 0. \quad (3.39)$$

Linearizirani se problem rješava uobičajenom tehnikom razdvajanja (separiranja) varijabli, pri čemu se potencijal brzine predstavlja u obliku umnoška dviju funkcija, od kojih svaka ovisi samo o jednoj nezavisnoj varijabli [54]:

$$\Phi^{(1)} = X_3(x_3) \cdot X_1(\alpha). \quad (3.40a)$$

Uz:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_1^2} = X_3 \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} = X_3 \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dX_1}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx_1} \right) = X_3 \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dX_1}{d\alpha} \right) \frac{d\alpha}{dx_1} = X_3 \frac{d^2 X_1}{d\alpha^2}, \quad (3.41)$$

jednadžba (3.39) prelazi u:

$$X_3 \frac{d^2 X_1}{d\alpha^2} + \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} X_1 = 0, \quad (3.42a)$$

što, nakon prebacivanja funkcija različitih varijabli na suprotne strane jednadžbe, daje:

$$\frac{1}{X_3} \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} = - \frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{d\alpha^2}. \quad (3.42b)$$

Posljednja jednakost vrijedi samo u slučaju kada niti njena lijeva, niti desna strana ne ovise o pripadnim varijablama, već su obje jednake bilo nuli, bilo nekoj konstanti. Kako se u prvom slučaju dobiva trivijalno rješenje, usvaja se:

$$\frac{1}{X_3} \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} = - \frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{d\alpha^2} = k^2. \quad (3.42c)$$

Razdvajanjem gornjeg izraza dobivaju se dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{d^2 X_3}{dx_3^2} - k^2 X_3 = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{d^2 X_1}{d\alpha^2} + k^2 X_1 = 0. \quad (3.44)$$

Uvrštavanjem pretpostavljenih oblika rješenja:

$$X_3 = B e^{\beta x_3} \quad (3.45a)$$

$$X_1 = C e^{\gamma \alpha} \quad (3.46a)$$

u jednadžbu (3.43), odnosno (3.44), slijedi:

$$\beta^2 B e^{\beta x_3} - k^2 B e^{\beta x_3} = 0 \Rightarrow \beta^2 - k^2 = 0 \quad (3.47a)$$

$$\gamma^2 C e^{\gamma \alpha} + k^2 C e^{\gamma \alpha} = 0 \Rightarrow \gamma^2 + k^2 = 0, \quad (3.48a)$$

odnosno:

$$\beta_{1,2} = \pm k \quad (3.47b)$$

$$\gamma_{1,2} = \pm i k. \quad (3.48b)$$

Rješenja jednadžbi glase:

$$X_3 = B_1 e^{kx_3} + B_2 e^{-kx_3} \quad (3.45b)$$

$$X_1 = C_1 e^{ik\alpha} + C_2 e^{-ik\alpha} . \quad (3.46b)$$

Uz:

$$\begin{aligned} e^{kx_3} &= \cosh kx_3 + \sinh kx_3 \\ e^{-kx_3} &= \cosh kx_3 - \sinh kx_3 \\ e^{ik\alpha} &= \cos k\alpha + i \sin k\alpha \\ e^{-ik\alpha} &= \cos k\alpha - i \sin k\alpha \end{aligned} \quad (3.49)$$

slijedi:

$$\begin{aligned} X_3 &= B_1 (\cosh kx_3 + \sinh kx_3) + B_2 (\cosh kx_3 - \sinh kx_3) = \\ &= (B_1 + B_2) \cosh kx_3 + (B_1 - B_2) \sinh kx_3 \end{aligned} \quad (3.45c)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= C_1 (\cos k\alpha + i \sin k\alpha) + C_2 (\cos k\alpha - i \sin k\alpha) = \\ &= (C_1 + C_2) \cos k\alpha + i(C_1 - C_2) \sin k\alpha . \end{aligned} \quad (3.46c)$$

S obzirom na to da, prema principu superponiranja, svaka linearna kombinacija rješenja homogene diferencijalne jednačbe i sama predstavlja rješenje te iste jednačbe, može se pisati:

$$X_3 = B_3 \cosh kx_3 + B_4 \sinh kx_3 \quad (3.45d)$$

$$X_1 = C_3 \cos k\alpha + C_4 \sin k\alpha = C_3 \cos k(x_1 - ct) + C_4 \sin k(x_1 - ct) . \quad (3.46d)$$

Uvrštavanjem gornjih rješenja u jednačbu (3.40a), izraz za linearni potencijal poprima sljedeći oblik:

$$\Phi^{(1)} = (B_3 \cosh kx_3 + B_4 \sinh kx_3) [C_3 \cos k(x_1 - ct) + C_4 \sin k(x_1 - ct)] . \quad (3.40b)$$

Nepoznate konstante određuju se iz rubnih uvjeta. Onaj na dnu, (3.26):

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_3} = k(B_3 \sinh kx_3 + B_4 \cosh kx_3) [C_3 \cos k(x_1 - ct) + C_4 \sin k(x_1 - ct)] = 0 , \quad (3.50a)$$

vrijedi za svaku udaljenost od ishodišta x_1 i svaki trenutak vremena t , tako da je na $x_3 = -d$:

$$B_3 \sinh(-kd) + B_4 \cosh(-kd) = 0 \quad (3.50b)$$

$$-B_3 \sinh kd + B_4 \cosh kd = 0 \quad (3.50c)$$

$$B_4 = B_3 \tanh kd . \quad (3.50d)$$

Iz dinamičkog rubnog uvjeta na slobodnoj površini, $x_3 = 0$, slijedi izraz za izdizanje površine vala (3.33b):

$$\zeta^{(1)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} = \frac{kc}{g} (B_3 \cosh 0 + B_4 \sinh 0) [-C_3 \sin k(x_1 - ct) + C_4 \cos k(x_1 - ct)]. \quad (3.51a)$$

Uz pretpostavku da se u početnom trenutku, $t = 0$, u ishodištu, $x_1 = 0$, nalazi valni brijeg, $\zeta^{(1)} = \frac{h}{2}$, slijedi:

$$\zeta^{(1)} = \frac{kcB_3}{g} (C_4 - C_3 \sin 0) = \frac{h}{2}, \quad (3.51b)$$

pa je:

$$B_3 C_4 = \frac{gh}{2kc}. \quad (3.51c)$$

Budući da se pokazalo da bilo koja vrijednost konstante C_3 zadovoljava propisane rubne uvjete, odabire se:

$$C_3 = 0. \quad (3.51d)$$

Uvrštavanje nepoznatih konstanti (3.50d), (3.51c) i (3.51d) u izraz za potencijal brzine (3.40b) daje:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} &= B_3 (\cosh kx_3 + \tanh kd \sinh kx_3) \frac{gh}{2kcB_3} \sin k(x_1 - ct) = \\ &= \frac{gh}{2kc} \frac{\cosh kx_3 \cosh kd + \sinh kd \sinh kx_3}{\cosh kd} \sin k(x_1 - ct) = \\ &= \frac{gh}{2kc} \frac{\cosh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \sin k(x_1 - ct). \end{aligned} \quad (3.52a)$$

Uz izraz za kružnu frekvenciju vala:

$$\omega = kc, \quad (3.53)$$

konačni oblik potencijala brzine prvog reda glasi:

$$\Phi^{(1)} = \frac{gh}{2\omega} \frac{\cosh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \sin(kx_1 - \omega t). \quad (3.52b)$$

Iz jednadžbe (3.51a) može se, na temelju istih konstanti, dobiti izraz za izdizanje (površine) vala:

$$\zeta^{(1)} = \frac{kc}{g} B_3 C_4 \cos k(x_1 - ct) = \frac{kc}{g} \frac{gh}{2kc} \cos(kx_1 - \omega t) = \frac{h}{2} \cos(kx_1 - \omega t). \quad (3.54)$$

Iz kombiniranog uvjeta, (3.34), na slobodnoj površini, $x_3 = 0$, proizlazi:

$$g \frac{gh}{2\omega} \sin(kx_1 - \omega t) \frac{\sinh kd}{\cosh kd} k - \frac{gh}{2\omega \cosh kd} \sin(kx_1 - \omega t) \omega^2 = 0, \quad (3.55a)$$

što, nakon sređivanja:

$$\frac{gh}{2\omega \cosh kd} \sin(kx_1 - \omega t) (gk \sinh kd - \omega^2 \cosh kd) = 0, \quad (3.55b)$$

daje jednadžbu rasipanja:

$$\omega^2 = gk \tanh kd. \quad (3.56)$$

Deriviranjem izraza za potencijal po prostornim koordinatama jednostavno je dobiti komponente brzine čestica tekućine:

$$u_1^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} = \frac{ghk}{2\omega} \frac{\cosh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \cos(kx_1 - \omega t) \quad (3.57a)$$

$$u_3^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_3} = \frac{ghk}{2\omega} \frac{\sinh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \sin(kx_1 - \omega t). \quad (3.57b)$$

Nadalje, deriviranje gornjih izraza po vremenu daje komponente ubrzanja čestice:

$$a_1^{(1)} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial t} = \frac{ghk}{2} \frac{\cosh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \sin(kx_1 - \omega t) \quad (3.58a)$$

$$a_3^{(1)} = \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t} = -\frac{ghk}{2} \frac{\sinh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \cos(kx_1 - \omega t). \quad (3.58b)$$

Integriranjem jednadžbi brzina čestica tekućine po vremenu, dobivaju se putanje čestica, slika 3.3:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(x_1, x_3; t) &= \int u_1^{(1)} dt = \int \frac{ghk}{2\omega} \frac{\cosh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \cos(kx_1 - \omega t) dt = \\ &= -\frac{ghk}{2\omega^2} \frac{\cosh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \sin(kx_1 - \omega t) + C \end{aligned} \quad (3.59a)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(1)}(x_1, x_3; t) &= \int u_3^{(1)} dt = \int \frac{ghk}{2\omega} \frac{\sinh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \sin(kx_1 - \omega t) dt = \\ &= \frac{ghk}{2\omega^2} \frac{\sinh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \cos(kx_1 - \omega t) + C, \end{aligned} \quad (3.59b)$$

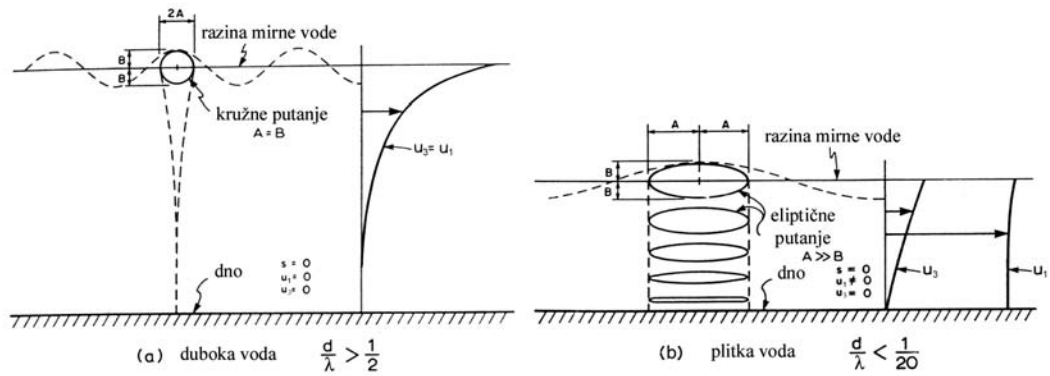
što, uz primjenu disperzivne jednadžbe (3.56):

$$\cosh kd = \frac{gk \sinh kd}{\omega^2},$$

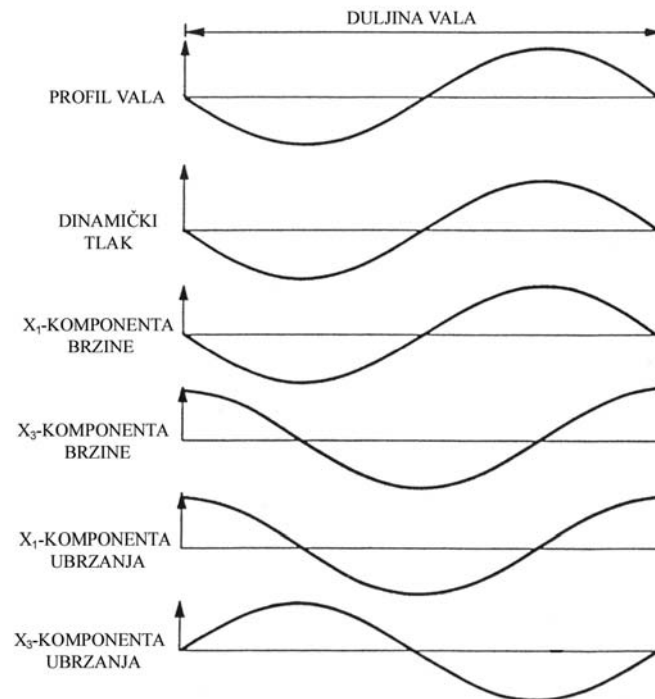
konačno daje:

$$\xi^{(1)}(x_1, x_3; t) = -\frac{h \cosh k(x_3 + d)}{2 \sinh kd} \sin(kx_1 - \omega t) \quad (3.60a)$$

$$\eta^{(1)}(x_1, x_3; t) = \frac{h \sinh k(x_3 + d)}{2 \sinh kd} \cos(kx_1 - \omega t). \quad (3.60b)$$



Slika 3.3 Putanje čestica vala [54]



Slika 3.4 Profili vala i kinematičko-dinamičke značajke dobivene linearnom teorijom [53]

Dinamički tlak može se odrediti ukoliko se u jednadžbi (3.23g) zanemare male veličine drugog reda:

$$p_d^{(1)} = -\rho \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} = \frac{\rho g h}{2} \frac{\cosh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \cos(kx_1 - \omega t). \quad (3.61)$$

Profili vala i kinematičko-dinamičke značajke dobiveni linearnom teorijom prikazani su na slici 3.4.

Ovisno o odnosu dubine vode i duljine vala, izvedeni izrazi mogu se prikazati i u jednostavnijem obliku. Za duboku vodu, za koju vrijedi da je $\frac{d}{\lambda} > \frac{1}{2}$, prikladno je koristiti približne izraze iz tablice 3.1.

	voda konačne dubine	voda beskonačne dubine
Potencijal brzine	$\phi = \frac{g\zeta_s}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx)$	$\phi = \frac{g\zeta_s}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$
Izraz raspršivanja	$\frac{\omega^2}{g} = k \tanh kh$	$\frac{\omega^2}{g} = k$
Veza između duljine i perioda vala	$\lambda = \frac{g}{2\pi} T^2 \tanh \frac{2\pi}{\lambda} h$	$\lambda = \frac{g}{2\pi} T^2$
Profil vala	$\zeta = \zeta_s \sin(\omega t - kx)$	$\zeta = \zeta_s \sin(\omega t - kx)$
Dinamički tlak	$p_D = \rho g \zeta_s \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\omega t - kx)$	$p_D = \rho g \zeta_s e^{kz} \sin(\omega t - kx)$
x_1 -komponenta brzine	$u_1 = \omega \zeta_s \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx)$	$u_1 = \omega \zeta_s e^{kz} \sin(\omega t - kx)$
x_3 -komponenta brzine	$u_3 = \omega \zeta_s \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx)$	$u_3 = \omega \zeta_s e^{kz} \cos(\omega t - kx)$
x_1 -komponenta ubrzanja	$a_1 = \omega^2 \zeta_s \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx)$	$a_1 = \omega^2 \zeta_s e^{kz} \cos(\omega t - kx)$
x_3 -komponenta ubrzanja	$a_3 = -\omega^2 \zeta_s \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx)$	$a_3 = -\omega^2 \zeta_s e^{kz} \sin(\omega t - kx)$

Tablica 3.1 Izrazi linearne teorije valova [53]

3.3. Brod na valovima

U slučaju plovidbe broda morem, postoji međudjelovanje između broda i valova. Valovi, predajući svoju energiju, pobuđuju gibanje (i deformiranje) broda, uslijed čega se i sami mijenjaju. Osim toga, odašiljanjem energije uslijed njihanja broda, nastaju i radijacijski valovi koji se od tijela šire radijalno u svim smjerovima. Kako bi se dobio potpun matematički model koji opisuje ponašanje broda na valovima, potrebno je osnovni problem rubnih vrijednosti, opisan u potpoglavlju 3.1, proširiti dodatnim jednadžbama.

Prvu od njih čini rubni uvjet na površini tijela (u dodiru s tekućinom) koji izražava nepromočivost trupa:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad \text{na } S_B, \quad (3.62a)$$

gdje je \vec{U} vektor brzine broda, S_B (trenutna) oplakana površina, a \vec{n} vektor normale na oplakanu površinu, dok \vec{v} uključuje i komponentu brzine koja je posljedica stacionarnog strujanja oko oplakane površine, izraz 3.145a. Izražavanjem vektora brzine čestice fluida preko funkcije potencijala, (3.20a), slijedi:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} n_3 = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad \text{na } S_B. \quad (3.62b)$$

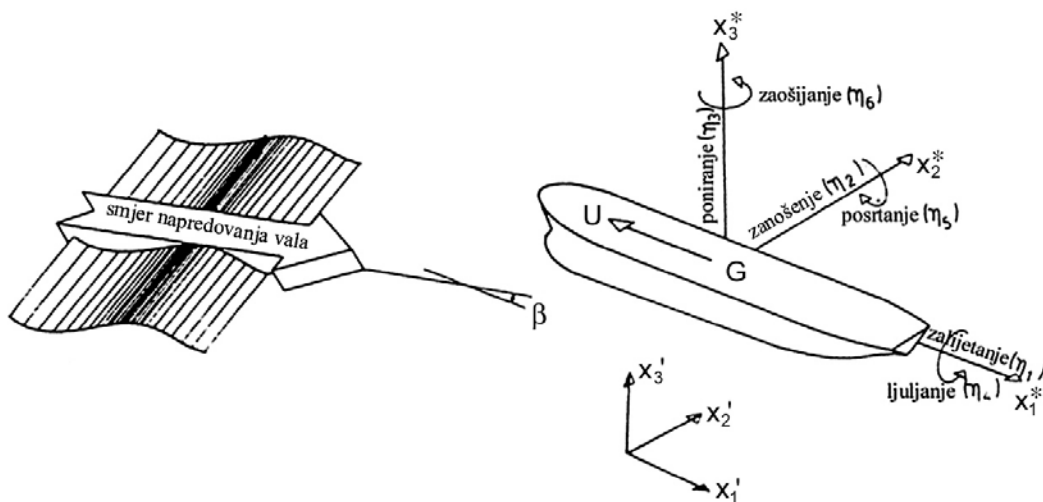
Lijeva strana gornje jednadžbe predstavlja derivaciju potencijala brzine u smjeru jedinične normale na površinu [45]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \text{grad} \Phi \cdot \vec{n}, \quad (3.63)$$

tako da se konačno dobiva:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad \text{na } S_B. \quad (3.62c)$$

Klasičan pristup u teoriji pomorstvenosti temelji se na pretpostavci dostatne krutosti broda, tako da se, zanemarivanjem deformacija, može smatrati da brod na valovima oscilira kao kruto tijelo sa šest stupnjeva slobode, slika 3.5.



Slika 3.5 Njihanje krutog tijela na valovima [53]

Zalijetanje (engl. *surge*), zanošenje (engl. *sway*) i poniranje (engl. *heave*) translacijska su gibanja, a ljuljanje (engl. *roll*), posrtanje (engl. *pitch*) i zaošijanje (engl. *yaw*) rotacijska. Samo tri od njih – poniranje, ljuljanje i posrtanje, čista su oscilatorna gibanja kod kojih djeluje povratna sila (ili moment) koji, nakon poremećaja, nastoje vratiti brod u ravnotežni položaj. Posljednje jednadžbe matematičkog modela čini šest jednadžbi njihanja krutog tijela na valovima:

$$\sum_{k=1}^6 m_{jk} \ddot{H}_k(t) = F_j(t) \quad j = 1, \dots, 6, \quad (3.64a)$$

gdje su m_{jk} komponente matrice masa (koja uključuje i momente tromosti mase), $\ddot{H}_k(t)$ ubrzanja k -te komponente njihanja, a F_j j -te komponente ukupnih sila i momenata na tijelo.

Ovakav je pristup davao zadovoljavajuće rezultate kod analize konvencionalnih brodova. Međutim, suvremeni kontejnerski brodovi velikih dužina (ne nazire se kraj porastu njihovih dimenzija) puno su elastičniji, što, uz njihovu (relativno) visoku brzinu, dovodi do preklapanja prirodnih frekvencija broda s onima valne uzbude koje više nije moguće zanemariti. Jedan od načina da se to uzme u obzir proširivanje je gore opisanog modela dodatnim jednadžbama “gibanja”, za određeni broj *suhih* prirodnih oblika vibriranja broda:

$$\sum_{k=1}^{6+N} m_{jk} \ddot{H}_k(t) = F_j(t) \quad j = 1, \dots, 6 + N, \quad (3.64b)$$

gdje je N broj prirodnih oblika vibriranja trupa na zraku.

Problem njihanja deformabilnog broda na valovima, uz već navedene nepoznanice potencijala brzine Φ i izdizanja vala ζ , ima i dodatnu varijablu – vektor brzine broda \vec{U} . Osim toga, nelinearnost više ne proizlazi samo iz rubnih uvjeta na slobodnoj površini, već i iz činjenice da oplakana površina i normala na nju ovise o trenutnom položaju broda. Stoga je ovaj problem još složeniji od (već razmatranog) osnovnog problema rubnih vrijednosti, tako da je ponovno nužno uvođenje određenih pretpostavki i pojednostavljenja kako bi se formulirao rješiv problem.

Dodatnu prepreku predstavlja iznimna složenost (stvarne) morske površine. Primjena linearne teorije, razvijene u prethodnom potpoglavlju, ne samo da pojednostavljuje matematički problem koji treba riješiti, već omogućuje i usvajanje hipoteze o primjeni principa superponiranja St. Denisa i Piersona, prema kojoj je odziv broda na nemirnom moru jednak sumi odziva na harmonijske komponentne valove svih frekvencija, amplituda i smjerova. Na taj se način problem određivanja odziva broda na nemirnom moru može podijeliti na dva jednostavnija zadatka – predviđanje njihanja (elastičnog) broda na harmonijskim valovima te predviđanje statističkih značajki odziva broda na nemirnom moru.

3.3.1. Susretna frekvencija

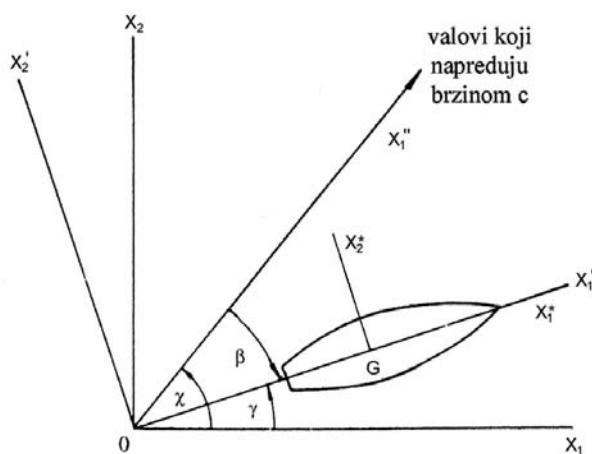
Valovi su dosad razmatrani s obzirom na inercijski desnokretni koordinatni sustav $OX_1X_2X_3$ vezan za Zemlju, slika 3.6.

Zakretanjem toga koordinatnog sustava za kut γ pod kojim brod plovi u odnosu na os OX_1 dobiva se inercijski koordinatni sustav $OX_1' X_2' X_3'$, slika 3.6. Vrijede sljedeće transformacije koordinata:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos \gamma + x_2 \sin \gamma \\ x_2' &= -x_1 \sin \gamma + x_2 \cos \gamma, \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} \quad (3.65a)$$

odnosno, u drugom smjeru:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' \cos \gamma - x_2' \sin \gamma \\ x_2 &= x_1' \sin \gamma + x_2' \cos \gamma, \\ x_3 &= x_3' \end{aligned} \quad (3.65b)$$



Slika 3.6 Koordinatni sustavi [58]

Koordinatni sustav broda $GX_1^* X_2^* X_3^*$ ima ishodište u razini mirne površine oceana na vertikali težišta broda i uvijek je paralelan koordinatnom sustavu $OX_1' X_2' X_3'$. U početnom trenutku ishodišta O i G preklapaju se, tako da su koordinate točke na brodu u trenutku t :

$$\begin{aligned} x_1' &= Ut + x_1^* \\ x_2' &= x_2^* \\ x_3' &= x_3^* \end{aligned} \quad (3.66a)$$

odnosno, u koordinatnom sustavu $OX_1X_2X_3$:

$$\begin{aligned}x_1 &= Ut \cos \gamma + x_1^* \cos \gamma - x_2^* \sin \gamma \\x_2 &= Ut \sin \gamma + x_1^* \sin \gamma + x_2^* \cos \gamma . \\x_3 &= x_3^*\end{aligned}\quad (3.66b)$$

Ukoliko val napreduje pod kutom χ u odnosu na os OX_1 , slika 3.6, uz:

$$x_1'' = x_1 \cos \chi + x_2 \sin \chi , \quad (3.67a)$$

što, primjenom transformacije koordinata (3.66b) daje:

$$x_1'' = (Ut \cos \gamma + x_1^* \cos \gamma - x_2^* \sin \gamma) \cos \chi + (Ut \sin \gamma + x_1^* \sin \gamma + x_2^* \cos \gamma) \sin \chi , \quad (3.67b)$$

izdizanje njegove površine, prema izrazu (3.54), glasi:

$$\begin{aligned}\zeta^{(1)} &= \frac{h}{2} \cos(kx_1'' - \omega t) = \frac{h}{2} \cos(kx_1 \cos \chi + kx_2 \sin \chi - \omega t) = \\&= \frac{h}{2} \cos[k \cos \chi (Ut \cos \gamma + x_1^* \cos \gamma - x_2^* \sin \gamma) + \\&\quad + k \sin \chi (Ut \sin \gamma + x_1^* \sin \gamma + x_2^* \cos \gamma) - \omega t] = \\&= \frac{h}{2} \cos[k(x_1^* + Ut)(\cos \chi \cos \gamma + \sin \chi \sin \gamma) + kx_2^*(-\cos \chi \sin \gamma + \sin \chi \cos \gamma) - \omega t].\end{aligned}\quad (3.68a)$$

Uz:

$$\cos(\chi - \gamma) = \cos \chi \cos \gamma + \sin \chi \sin \gamma \quad (3.69a)$$

$$\sin(\chi - \gamma) = \sin \chi \cos \gamma - \cos \chi \sin \gamma , \quad (3.69b)$$

slijedi:

$$\begin{aligned}\zeta^{(1)} &= \frac{h}{2} \cos[kx_1^* \cos(\chi - \gamma) + kx_2^* \sin(\chi - \gamma) - (\omega - kU \cos(\chi - \gamma))t] = \\&= \frac{h}{2} \cos(kx_1^* \cos \beta + kx_2^* \sin \beta - \omega_e t),\end{aligned}\quad (3.68b)$$

gdje je $\beta = \chi - \gamma$ susretni kut, tj. kut između smjera napredovanja vala i smjera plovidbe broda koji se, prema preporuci SNAME [57], mjeri od smjera napredovanja vala u smjeru kazaljke na satu, slika 3.7.

Susretna frekvencija:

$$\omega_e = \omega - kU \cos \beta , \quad (3.70a)$$

jednaka je frekvenciji vala uvećanoj za Dopplerov pomak frekvencije. Primjenom jednadžbe rasipanja za duboku vodu:

$$k = \frac{\omega^2}{g},$$

dobiva se:

$$\omega_e = \omega - \frac{\omega^2}{g} U \cos \beta = \omega \left(1 - \frac{\omega}{g} U \cos \beta \right). \quad (3.70b)$$

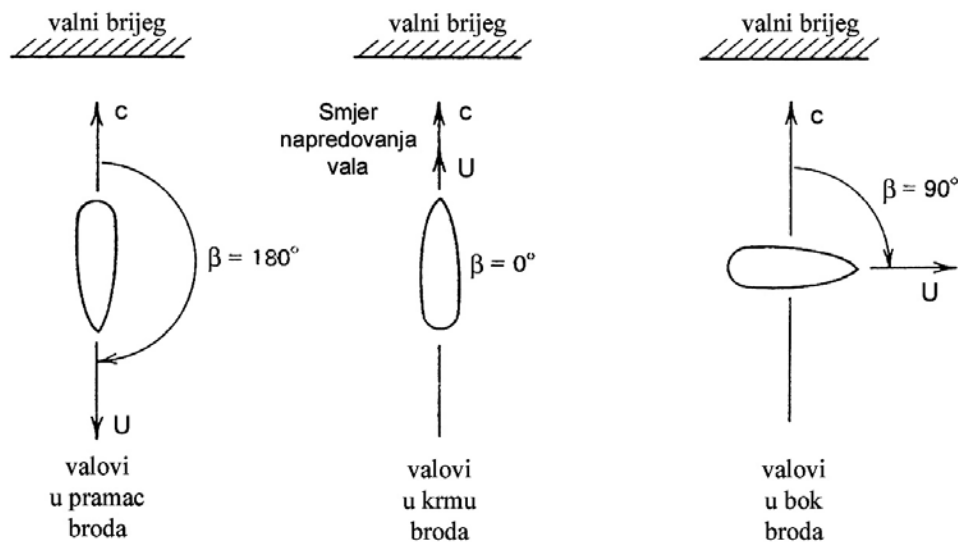
Vidljivo je da susretna frekvencija ovisi o frekvenciji vala, brzini broda i susretnom kutu. Kod valova u pramac broda, $\beta = 180^\circ$

$$\omega_e = \omega + U \frac{\omega^2}{g}, \quad (3.70c)$$

brod će, s obzirom na to da je period obrnuto srazmjeran frekvenciji, brže susretati uzastopne valove. Slično tome, na valovima u krmu broda, $\beta = 0^\circ$:

$$\omega_e = \omega - U \frac{\omega^2}{g}, \quad (3.70d)$$

period susretanja valova bit će duži. Moguća negativna vrijednost susretne frekvencije znači da je brzina napredovanja broda veća od brzine valova.



Slika 3.7 Definicija susretnih kutova [59]

3.4. Njihanje elastičnog broda na harmonijskim valovima

Linearna teorija harmonijskih valova proizlazi iz pretpostavke malog omjera visine i duljine vala, na osnovi koje se lineariziraju kinematički i dinamički rubni uvjet na (srednjoj) slobodnoj površini. Stoga je ta teorija valjana samo za valove malih amplituda, na kojima će i, njima srazmjerne, amplitude oscilacijskog gibanja također biti male. Osim toga, potrebno je linearizirati i uvjet nepromočivosti na površini tijela, (3.62c), koji se, u okviru linearne teorije, može zadovoljiti na srednjoj oplakanoj površini. Potrebno je naglasiti kako će se, zbog jednostavnosti, u nastavku ovog potpoglavlja izvoditi izrazi za slučaj plutajuće konstrukcije (kada je susretna frekvencija jednaka frekvenciji vala); dok će se učinak brzine napredovanja broda na pojedine od tih izraza obuhvatiti u sljedećem potpoglavlju.

Određivanje odziva kod njihanja elastičnog tijela na harmonijskim valovima uvijek se, u okviru modalne analize, provodi u nekoliko karakterističnih koraka:

- određivanje potencijalâ brzine strujanja rješavanjem odgovarajućeg broja problema rubnih vrijednosti,
- određivanje komponenti ukupne sile na tijelo integriranjem komponenti ukupnog tlaka po oplakanoj površini,
- rješavanje jednadžbe njihanja po nepoznatim (kompleksnim) amplitudama komponentnih pomaka,
- određivanje traženog odziva na temelju komponenti odziva i amplituda komponentnih pomaka.

Trenutni položaj proizvoljne točke na brodu u inercijskom desnokretnom kartezijskom koordinatnom sustavu definiran je vektorom:

$$\vec{r}(t) = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}, \quad (3.71)$$

dok je vektor položaja iste te točke u mirovanju:

$$\vec{R} = X_1 \vec{i} + X_2 \vec{j} + X_3 \vec{k}. \quad (3.72)$$

Vektor pomaka te točke tada se može definirati kao:

$$\vec{H}(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}. \quad (3.73)$$

Uslijed periodičke izmjene energije između progresivnih harmonijskih valova i uronjenog tijela, dolazi do oscilatornog njihanja (elastičnog) tijela na valovima. Pomaci broda na takvim valovima i sami su, zbog linearnosti, harmonijskog oblika (po susretnoj frekvenciji):

$$\vec{H}(t) = \text{Re} \left\{ \vec{\tilde{H}} e^{-i\omega_e t} \right\}. \quad (3.74a)$$

Rastavljanjem kompleksne amplitude vektora pomaka na realnu i imaginarnu komponentu:

$$\vec{H} = \vec{H}^{\text{Re}} + i\vec{H}^{\text{Im}}, \quad (3.75)$$

te primjenom Eulerove formule:

$$e^{-i\omega_e t} = \cos \omega_e t - i \sin \omega_e t, \quad (3.76)$$

dobiva se:

$$\begin{aligned} \vec{H}(t) &= \text{Re} \left\{ \left(\vec{H}^{\text{Re}} + i\vec{H}^{\text{Im}} \right) (\cos \omega_e t - i \sin \omega_e t) \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \vec{H}^{\text{Re}} \cos \omega_e t + \vec{H}^{\text{Im}} \sin \omega_e t + i \left(\vec{H}^{\text{Im}} \cos \omega_e t - \vec{H}^{\text{Re}} \sin \omega_e t \right) \right\} = \\ &= \vec{H}^{\text{Re}} \cos \omega_e t + \vec{H}^{\text{Im}} \sin \omega_e t = |\vec{H}| \cos(\omega_e t + \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.74b)$$

gdje je:

$$|\vec{H}| = \sqrt{\vec{H}^{\text{Re}^2} + \vec{H}^{\text{Im}^2}} \quad (3.77)$$

apsolutna vrijednost (kompleksne) amplitude pomaka, a:

$$\varepsilon = \arctan \left(-\frac{\vec{H}^{\text{Im}}}{\vec{H}^{\text{Re}}} \right) \quad (3.78)$$

fazni pomak odziva u odnosu na nailazni val.

Parcijalnim deriviranjem jednadžbe (3.74a) po vremenu dobiva se izraz za brzinu točke na brodu (u koordinatnom sustavu broda $G X_1^* X_2^* X_3^*$):

$$\begin{aligned} \vec{H}(t) &= \text{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}(t) \right\} = \text{Re} \left\{ i\omega_e \vec{H} e^{-i\omega_e t} \right\} = \text{Re} \left\{ i\omega_e \left(\vec{H}^{\text{Re}} + i\vec{H}^{\text{Im}} \right) (\cos \omega_e t - i \sin \omega_e t) \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \omega_e \left(\vec{H}^{\text{Im}} \cos \omega_e t - \vec{H}^{\text{Re}} \sin \omega_e t \right) - i\omega_e \left(\vec{H}^{\text{Re}} \cos \omega_e t + \vec{H}^{\text{Im}} \sin \omega_e t \right) \right\} = \\ &= \omega_e \left(\vec{H}^{\text{Im}} \cos \omega_e t - \vec{H}^{\text{Re}} \sin \omega_e t \right) = \omega_e |\vec{H}| \sin(\omega_e t + \varepsilon) = \\ &= \omega_e |\vec{H}| \cos \left(\omega_e t + \varepsilon - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

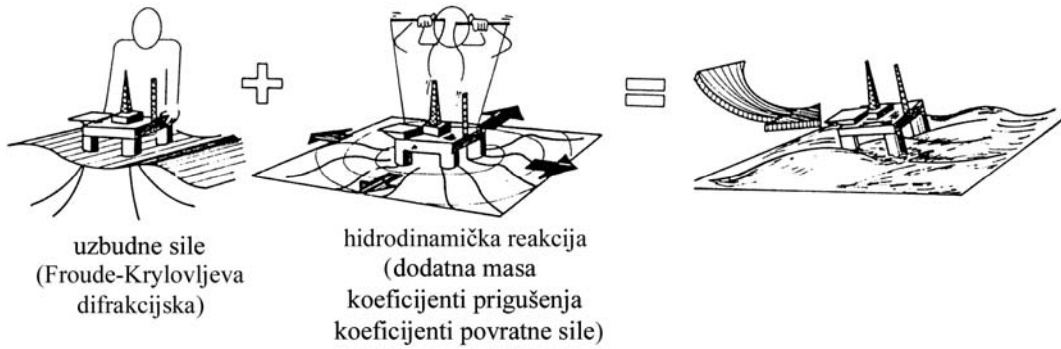
Deriviranje iste jednadžbe dvaput po vremenu rezultira izrazom za ubrzanje točke na brodu:

$$\begin{aligned} \vec{H}(t) &= \text{Re} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H}(t) \right\} = \text{Re} \left\{ -\omega_e^2 \vec{H} e^{-i\omega_e t} \right\} = \text{Re} \left\{ -\omega_e^2 \left(\vec{H}^{\text{Re}} + i\vec{H}^{\text{Im}} \right) (\cos \omega_e t - i \sin \omega_e t) \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ -\omega_e^2 \left(\vec{H}^{\text{Re}} \cos \omega_e t + \vec{H}^{\text{Im}} \sin \omega_e t \right) - i\omega_e^2 \left(\vec{H}^{\text{Im}} \cos \omega_e t - \vec{H}^{\text{Re}} \sin \omega_e t \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\omega_e^2 \left(\vec{H}^{\text{Re}} \cos \omega_e t + \vec{H}^{\text{Im}} \sin \omega_e t \right) = -\omega_e^2 |\vec{H}| \cos(\omega_e t + \varepsilon) = \\
&= \omega_e^2 |\vec{H}| \cos(\pi - \omega_e t - \varepsilon) = \omega_e^2 |\vec{H}| \cos(\omega_e t + \varepsilon - \pi).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Vidljivo je da je, u odnosu na pomak, brzina pomaknuta u fazi za $\frac{\pi}{2}$, a ubrzanje za π .

Primjena linearne teorije omogućuje određivanje ukupnih hidrostatičkih i hidrodinamičkih sila na tijelo superponiranjem pojedinih njihovih komponenti. Stoga se (pre)složeni problem njihanja (elastičnog) tijela na progresivnim harmonijskim valovima može razdvojiti na dva jednostavnija potproblema, slika 3.8.



Slika 3.8 Komponente hidrodinamičkih sila na tijelo [53]

U prvom se slučaju, primjenom teorije difrakcije, razmatra strujanje oko nepomične konstrukcije. Budući da dimenzije broda nisu male u odnosu na (relevantne) duljine vala, ne može se zanemariti promjena valnog polja u blizini broda, do koje dolazi odbijanjem nailaznog vala od površine trupa i nastankom difrakcijskog vala.

Drugi, radijacijski problem proučava nastanak radijacijskog vala zbog oscilacijskog njihanja elastičnog tijela na inače mirnom moru.

Budući da je kod svakog od ovih potproblema najprije potrebno riješiti odgovarajući problem rubnih vrijednosti, prikladno je i glavnu nepoznanicu ukupnog problema, potencijal brzine, rastaviti na odgovarajuće dijelove:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; t) = \Phi_I(x_1, x_2, x_3; t) + \Phi_P(x_1, x_2, x_3; t), \tag{3.81a}$$

gdje je Φ_I potencijal brzine nailaznog vala, a Φ_P potencijal brzine strujanja nastalog zbog prisutnosti tijela koji se može dalje rastaviti na:

potencijal brzine difrakcijskog vala Φ_D i potencijal brzine radijacijskog vala Φ_R .

Matematički model nepomičnog tijela na valu, slika 3.9, sastavljen je od Laplaceove jednadžbe (3.25), rubnog uvjeta na dnu (3.26), jedinstvenog lineariziranog rubnog uvjeta na slobodnoj površini (3.34) i uvjeta nepromočivosti na oplakanoj površini (3.62c) koji, u ovom slučaju, prelazi u:

The diagram illustrates a fluid system with a free surface and a submerged body. The free surface is represented by a wavy line with a slope indicated by the expression $g \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$. A coordinate system is shown with x_1 and x_3 axes. The surface elevation is given by $\zeta = \frac{h}{2} \cos \theta$. A submerged body, labeled "nepomično tijelo" (fixed body), is shown below the surface. The boundary conditions for the velocity potential Φ are $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ on the body surface and $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0$ at the bottom boundary. The distance from the undisturbed surface level to the bottom is denoted by d .

Potrebno je odrediti nepoznati potencijal brzine Φ sastavljen od potencijala brzine nailaznog i difrakcijskog vala:

Uvrštavanjem gornjeg izraza u rubni uvjet (3.82a), dobiva se:

odakle slijedi:

83

Budući da je normala na (nepomičnu) oplakanu površinu trupa neovisna o vremenu, isti odnos vrijedi i za kompleksne amplitude potencijala brzine nailaznog i difrakcijskog vala:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_D}{\partial n} = -\frac{\partial \tilde{\phi}_I}{\partial n} \quad \text{na } S_B. \quad (3.82d)$$

Potencijal brzine nailaznog vala jednak je rješenju osnovnog problema rubnih vrijednosti, jednadžba (3.52b), uzimajući u obzir da val napreduje pod kutom χ u odnosu na os OX_1 , jednadžba (3.67a):

$$\Phi_I^{(1)}(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{gh}{2\omega} \frac{\cosh k(x_3 + d)}{\cosh kd} \sin(kx_1 - \omega t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\phi}_I(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t} \right\}, \quad (3.84a)$$

gdje je:

$$\tilde{\phi}_I^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{igh}{2\omega} \frac{\cosh k(x_3 + d)}{\cosh kd} e^{ik(x_1 \cos \chi + x_2 \sin \chi)} \quad (3.84b)$$

kompleksna amplituda potencijala brzine nailaznog vala.

Potencijal difrakcijske komponente mora zadovoljiti i dodatni radijacijski uvjet u beskonačnosti, po kojem se svi valovi nastali zbog prisutnosti broda, moraju radijalno širiti oko njega i iščeznuti na velikoj udaljenosti. Za plutajuća tijela ($U=0$) vrijedi [54, 57]:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Phi_D = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-ikR}}{\sqrt{R}} = 0, \quad (3.85a)$$

odnosno:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} - ik \right) \Phi_D = 0, \quad (3.85b)$$

gdje je:

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (3.86)$$

radijalna udaljenost od težišta broda.

Problem radijacije

I linearni model njihanja elastičnog tijela u mirnoj tekućini sačinjavaju Laplaceova jednadžba (3.25), uvjet nepromočivosti na dnu (3.26), jedinstveni linearizirani rubni uvjet na slobodnoj površini (3.34) te radijacijski uvjet u beskonačnosti i rubni uvjet na površini tijela. Slično difrakcijskom valu, i radijacijska sastavnica treba iščeznuti na velikoj udaljenosti od tijela [54]:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} - ik \right) \Phi_R = 0. \quad (3.87)$$

Uvjet nepromočivosti na oplakanoj površini (3.62c) propisuje da u svakoj točki te površine, komponenta brzine čestice fluida u smjeru normale na površinu u toj točki mora biti jednaka komponenti brzine te točke na oplakanoj površini, izraz (3.79), u smjeru te iste normale:

$$\frac{\partial \Phi_R}{\partial n} = \vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{H}(t) \cdot \vec{n} \quad na S_B \quad (3.88a)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\phi}^R e^{-i\omega_e t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\tilde{H} e^{-i\omega_e t} \right) \right\} \cdot \vec{n} = \operatorname{Re} \left\{ -i\omega_e \tilde{H} e^{-i\omega_e t} \right\} \cdot \vec{n} \quad na S_B, \quad (3.88b)$$

odakle proizlazi:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}^R}{\partial n} = -i\omega_e \tilde{H} \cdot \vec{n} \quad na S_B. \quad (3.88c)$$

Vektor pomaka točke može se, primjenom metode superponiranja prirodnih oblika vibriranja (engl. *modal superposition method*), prikazati kao:

$$\tilde{H} = \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \vec{h}^j, \quad (3.89)$$

gdje je $\tilde{\xi}_j$ kompleksna amplituda, a \vec{h}^j vektor pomaka točke uslijed j-tog stupnja slobode koji uključuje pomake krutog tijela ($j=1, \dots, 6$) i prirodne oblike vibriranja ($j=7, \dots, 6+N$).

Potencijal brzine radijacijskog vala prikladno je rastaviti na linearnu kombinaciju potencijalâ brzine komponenti radijacijskog vala uslijed pojedinačnih pomaka:

$$\tilde{\phi}^R = -i\omega_e \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \tilde{\phi}_j^R, \quad (3.90)$$

gdje je $\tilde{\phi}_j^R$ kompleksna amplituda potencijala zbog j-te komponente pomaka točke na oplakanoj površini. Uvođenjem dvije posljednje sume, izraz (3.88c) prelazi u:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(-i\omega_e \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \tilde{\phi}_j^R \right) = -i\omega_e \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \vec{h}^j \cdot \vec{n} \quad na S_B, \quad (3.88d)$$

tako da za svaku komponentu ukupnog pomaka vrijedi:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_j^R}{\partial n} = \vec{h}^j \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^3 h_i^j \cdot n_i \quad na S_B \quad j = 1, \dots, 6 + N. \quad (3.88e)$$

U slučaju njihanja krutog tijela na valovima, postoji samo šest komponenti pomaka, pri čemu je \vec{R}^Q vektor položaja referentne točke (za njihanje krutog tijela) u mirovanju:

$$\begin{aligned}\vec{h}^1 &= \vec{i} = (1, 0, 0) \\ \vec{h}^2 &= \vec{j} = (0, 1, 0) \\ \vec{h}^3 &= \vec{k} = (0, 0, 1) \\ \vec{h}^4 &= \vec{i} \times (\vec{R} - \vec{R}^Q) = -(X_3 - X_3^Q)\vec{j} + (X_2 - X_2^Q)\vec{k} = (0, -(X_3 - X_3^Q), (X_2 - X_2^Q)) \\ \vec{h}^5 &= \vec{j} \times (\vec{R} - \vec{R}^Q) = (X_3 - X_3^Q)\vec{i} - (X_1 - X_1^Q)\vec{k} = ((X_3 - X_3^Q), 0, -(X_1 - X_1^Q)) \\ \vec{h}^6 &= \vec{k} \times (\vec{R} - \vec{R}^Q) = (X_1 - X_1^Q)\vec{j} - (X_2 - X_2^Q)\vec{i} = (-(X_2 - X_2^Q), (X_1 - X_1^Q), 0)\end{aligned} \quad (3.91)$$

tako da su rubni uvjeti komponenti njihanja krutog tijela:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{\phi}_1^R}{\partial n_i} &= \vec{h}^1 \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^3 h_i^1 \cdot n_i = n_1 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{\phi}_2^R}{\partial n_i} &= \vec{h}^2 \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^3 h_i^2 \cdot n_i = n_2 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{\phi}_3^R}{\partial n_i} &= \vec{h}^3 \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^3 h_i^3 \cdot n_i = n_3 \quad \text{na } S_B \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{\phi}_4^R}{\partial n_i} &= \vec{h}^4 \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^3 h_i^4 \cdot n_i = -(X_3 - X_3^Q)n_2 + (X_2 - X_2^Q)n_3 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{\phi}_5^R}{\partial n_i} &= \vec{h}^5 \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^3 h_i^5 \cdot n_i = (X_3 - X_3^Q)n_1 - (X_1 - X_1^Q)n_3 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{\phi}_6^R}{\partial n_i} &= \vec{h}^6 \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^3 h_i^6 \cdot n_i = -(X_2 - X_2^Q)n_1 + (X_1 - X_1^Q)n_2\end{aligned} \quad (3.92a)$$

Ti se rubni uvjeti mogu prikazati i u skraćenom obliku:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_j^R}{\partial n} = n_j \quad \text{na } S_B \quad j = 1, \dots, 6. \quad (3.92b)$$

3.4.1. Sile kod njihanja elastičnog tijela na harmonijskim valovima

Nakon određivanja svih komponenti potencijala brzine, ukupna se sila na tijelo može odrediti integriranjem tlaka po oplakanoj površini:

$$\vec{F} = - \iint_{S_B} p \vec{n} dS, \quad (3.93a)$$

pri čemu se tlak u pojedinim točkama oplakane površine računa na temelju Bernoullijeve jednadžbe (3.23b), u kojoj se, u slučaju primjene linearne teorije, može zanemariti kvadrat brzine fluida u tim točkama:

$$p = -\rho g x_3 - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3.94)$$

Uvrštavanje posljednjeg izraza u jednadžbu (3.93a) omogućuje podjelu ukupne sile na hidrostatsku i hidrodinamičku komponentu:

$$\vec{F} = \iint_{S_B} \left(-\rho g x_3 - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \vec{n} dS = \vec{F}^{hs} + \vec{F}^{hd}, \quad (3.93b)$$

gdje su:

$$\vec{F}^{hs} = -\rho g \iint_{S_B} x_3 \vec{n} dS \quad (3.95a)$$

$$\vec{F}^{hd} = -\rho \iint_{S_B} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \vec{n} dS. \quad (3.96a)$$

Korištenjem metode superpozicije prirodnih oblika vibriranja (vidi potpoglavlje 4.1) dolazi se do radova tlaka na pomacima pojedinih oblika koje nazivamo *modalnim silama*:

$$F_i = \iint_{S_B} \vec{h}^i \left(-\rho g x_3 - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \vec{n} dS = F_i^{hs} + F_i^{hd}, \quad (3.93c)$$

sastavljenima od hidrostatskog i hidrodinamičkog dijela:

$$F_i^{hs} = -\rho g \iint_{S_B} x_3 \vec{h}^i \vec{n} dS \quad (3.95b)$$

$$F_i^{hd} = -\rho \iint_{S_B} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \vec{h}^i \vec{n} dS. \quad (3.96b)$$

Hidrostatski dio

U dinamičkoj analizi, vibracije konstrukcije razmatraju se s obzirom na statički položaj ravnoteže. Modalna povratna sila stoga obuhvaća samo promjenu modalne hidrostatske i gravitacijske sile, odnosno razliku između njihovih trenutnih i početnih vrijednosti.

Za tako definiranu hidrostatsku sastavnicu modalne povratne sile i-tog oblika vibriranja vrijedi:

$$\delta F_i^{hs} = -\rho g \iint_{\hat{S}_B} x_3 \hat{h}^i \hat{n} d\hat{S} + \rho g \iint_{S_B} X_3 \vec{h}^i \vec{n} dS, \quad (3.97a)$$

pri čemu “ $\hat{}$ ” označava trenutne vrijednosti. Budući da je promjena oplakane površine neznatna, $\hat{S}_B \approx S_B$, slijedi:

$$\begin{aligned}
\delta F_i^{hs} &= -\rho g \iint_{S_B} (X_3 + \delta X_3) (\vec{h}^i + \delta \vec{h}^i) (\vec{n} + \delta \vec{n}) dS + \rho g \iint_{S_B} X_3 \vec{h}^i \vec{n} dS = \\
&= -\rho g \iint_{S_B} (X_3 \vec{h}^i \vec{n} + \delta X_3 \vec{h}^i \vec{n} + X_3 \delta \vec{h}^i \vec{n} + X_3 \vec{h}^i \delta \vec{n} - X_3 \vec{h}^i \vec{n}) dS + \\
&\quad + \rho g \iint_{S_B} (X_3 \delta \vec{h}^i \delta \vec{n} + \delta X_3 \vec{h}^i \delta \vec{n} + \delta X_3 \delta \vec{h}^i \vec{n} + \delta X_3 \delta \vec{h}^i \delta \vec{n}) dS .
\end{aligned} \tag{3.97b}$$

Zanemarivanjem posljednjeg člana koji sadrži male veličine višeg reda, dobiva se:

$$\delta F_i^{hs} = -\rho g \iint_{S_B} (\delta X_3 \vec{h}^i \vec{n} + X_3 \delta \vec{h}^i \vec{n} + X_3 \vec{h}^i \delta \vec{n}) dS = \delta F_i^{hsp} + \delta F_i^{hsh} + \delta F_i^{hsn}, \tag{3.97c}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
\delta F_i^{hsp} &= -\rho g \iint_{S_B} \delta X_3 \vec{h}^i \vec{n} dS \\
\delta F_i^{hsh} &= -\rho g \iint_{S_B} X_3 \delta \vec{h}^i \vec{n} dS, \\
\delta F_i^{hsn} &= -\rho g \iint_{S_B} X_3 \vec{h}^i \delta \vec{n} dS
\end{aligned} \tag{3.98}$$

doprinosi promjeni modalne hidrostaticke povratne sile i-tog oblika vibriranja uslijed promjene (redom) statičkog tlaka, vektora oblika i vektora normale. Dakle, izraz (3.97) uključuje utjecaj velikih deformacija.

Promjena koordinate X_3 jednaka je odgovarajućoj komponenti vektora pomaka:

$$\delta X_3 = x_3 - X_3 = H_3 = \sum_{j=1}^{6+N} \xi_j h_3^j, \tag{3.99}$$

tako da je:

$$\delta F_i^{hsp} = -\rho g \iint_{S_B} \sum_{j=1}^{6+N} \xi_j h_3^j \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS = -\sum_{j=1}^{6+N} \xi_j \rho g \iint_{S_B} h_3^j \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS = -\sum_{j=1}^{6+N} C_{ij}^{hsp} \xi_j, \tag{3.100}$$

gdje je:

$$C_{ij}^{hsp} = \rho g \iint_{S_B} h_3^j (\vec{h}^i \cdot \vec{n}) dS = \rho g \iint_{S_B} h_3^j (h_1^i n_1 + h_2^i n_2 + h_3^i n_3) dS, \tag{3.101}$$

koeficijent hidrostatickog dijela modalne povratne sile i-tog oblika (uslijed promjene statičkog tlaka) zbog jediničnog pomaka j-tog oblika vibriranja.

Promjena vektora oblika jednaka je derivaciji vektora pomaka u smjeru tog jediničnog vektora oblika:

$$\delta \vec{h}^i = (\nabla \vec{H}) \cdot \vec{h}^i = \sum_{j=1}^{6+N} \xi_j (\nabla \vec{h}^j) \vec{h}^i \quad (3.102)$$

pa je odgovarajući doprinos modalnoj povratnoj sili:

$$\begin{aligned} \delta F_i^{hsh} &= -\rho g \iint_{S_B} X_3 \sum_{j=1}^{6+N} \xi_j (\nabla \vec{h}^j) \vec{h}^i \vec{n} dS = \\ &= -\sum_{j=1}^{6+N} \rho g \iint_{S_B} X_3 (\nabla \vec{h}^j) \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS \cdot \xi_j = -\sum_{j=1}^{6+N} C_{ij}^{hsh} \xi_j, \end{aligned} \quad (3.103)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} C_{ij}^{hsh} &= \rho g \iint_{S_B} X_3 (\nabla \vec{h}^j) \vec{h}^i \vec{n} dS = \rho g \iint_{S_B} X_3 (\nabla \vec{h}^j) \sum_{k=1}^3 h_k^i n_k dS = \\ C_{ij}^{hsh} &= \rho g \iint_{S_B} X_3 \left[\left(h_1^j \frac{\partial h_1^i}{\partial x_1} + h_2^j \frac{\partial h_1^i}{\partial x_2} + h_3^j \frac{\partial h_1^i}{\partial x_3} \right) n_1 + \left(h_1^j \frac{\partial h_2^i}{\partial x_1} + h_2^j \frac{\partial h_2^i}{\partial x_2} + h_3^j \frac{\partial h_2^i}{\partial x_3} \right) n_2 \right] dS + \\ &+ \rho g \iint_{S_B} X_3 \left[\left(h_1^j \frac{\partial h_3^i}{\partial x_1} + h_2^j \frac{\partial h_3^i}{\partial x_2} + h_3^j \frac{\partial h_3^i}{\partial x_3} \right) n_3 \right] dS. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Budući da nije poznat eksplicitni oblik vektora normale, do njegove promjene, $\delta \vec{n}$, može se doći i na sljedeći način. Položaj točke na oplakanoj površini u stanju mirovanja, (3.72), može se zadati i u parametarskom obliku:

$$\vec{R} = X_1(u, v) \vec{i} + X_2(u, v) \vec{j} + X_3(u, v) \vec{k}, \quad (3.105)$$

gdje su u i v zakrivljene (Gaussove) koordinate, slika 3.10.

Vektorski produkt lukova diferencijalne površine:

$$d\vec{s}_u = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} du = \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial X_3}{\partial u} \vec{k} \right) du \quad (3.106a)$$

$$d\vec{s}_v = \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial X_1}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial X_2}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial X_3}{\partial v} \vec{k} \right) dv \quad (3.106b)$$

daje normalu na površinu, duljine jednake diferencijalnoj površini:

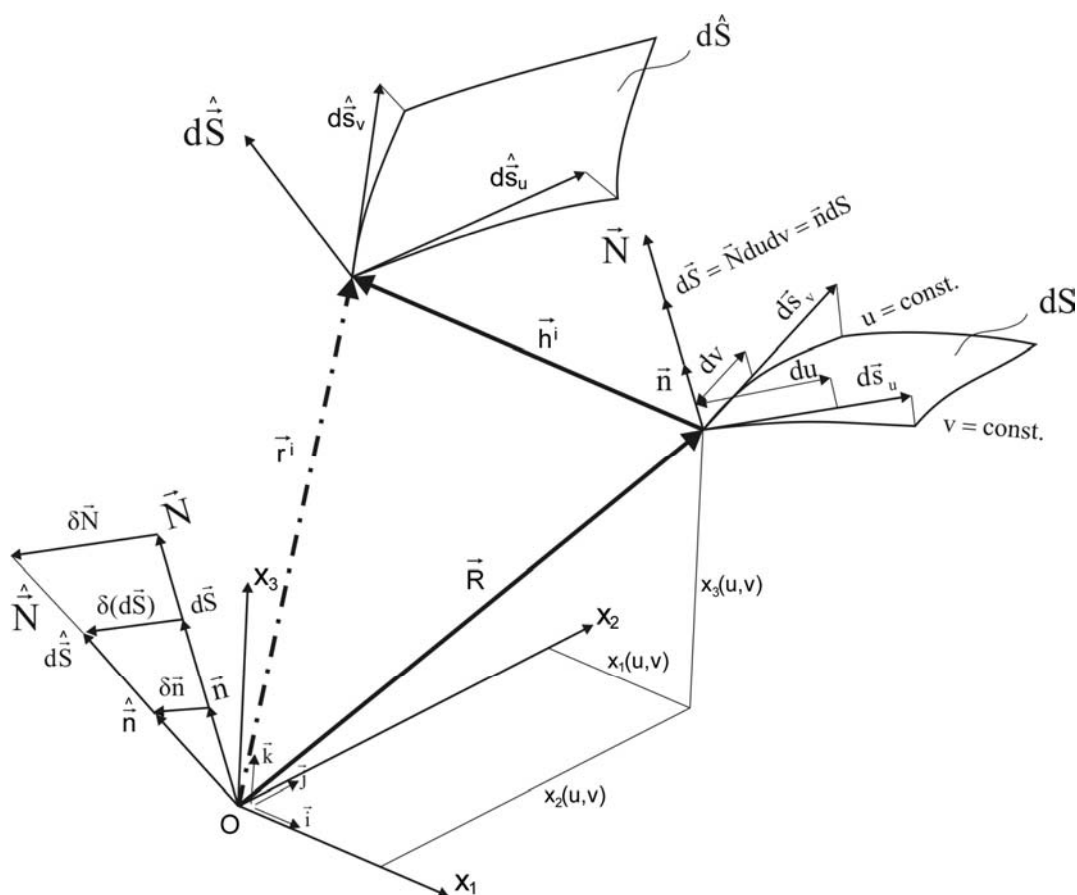
$$d\vec{S} = d\vec{s}_u \times d\vec{s}_v = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right) du dv = \vec{N} du dv, \quad (3.107)$$

gdje je:

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial v}, \quad (3.108)$$

vektor normale na površinu koji ima sljedeće komponente:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} - \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} \\ N_2 &= \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} - \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} \\ N_3 &= \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} \end{aligned} \quad (3.109)$$



Slika 3.10 Varijacija vektora normale [60]

Jedinični vektor normale na površinu glasi:

$$\vec{n} = \frac{d\vec{S}}{dS}. \quad (3.110)$$

Prilikom vibriranja, deformira se oplakana površina i amplitudni položaj iste točke na njoj definiran je vektorom:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{h}^i. \quad (3.111)$$

Ponovno se, preko lukova deformirane diferencijalne površine:

$$d\hat{s}_u = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial u} du = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} + \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial u} \right) du \quad (3.112a)$$

$$d\hat{s}_v = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} + \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial v} \right) dv, \quad (3.112b)$$

može doći do normale na tu površinu:

$$d\hat{S} = d\hat{s}_u \times d\hat{s}_v = \left[\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} + \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} + \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial v} \right) \right] dudv = \hat{N} dudv, \quad (3.113)$$

odakle slijedi da je:

$$\hat{N} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial v} + \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} + \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial v}. \quad (3.114)$$

Uz zanemarivanje posljednjeg člana gornjeg izraza koji predstavlja malu veličinu drugog reda, može se odrediti promjena normale:

$$\delta \vec{N} = \hat{N} - \vec{N} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial v} + \frac{\partial \vec{h}^i}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial v}, \quad (3.116)$$

s komponentama:

$$\begin{aligned} \delta N_1 &= \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial h_3^i}{\partial v} - \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial h_2^i}{\partial v} + \frac{\partial h_2^i}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} - \frac{\partial h_3^i}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} \\ \delta N_2 &= \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial h_1^i}{\partial v} - \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial h_3^i}{\partial v} + \frac{\partial h_3^i}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} - \frac{\partial h_1^i}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} \\ \delta N_3 &= \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial h_2^i}{\partial v} - \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial h_1^i}{\partial v} + \frac{\partial h_1^i}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial h_2^i}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} \end{aligned} \quad (3.117)$$

Budući da je:

$$\vec{h}^i = h_1^i(X_1, X_2, X_3) \vec{i} + h_2^i(X_1, X_2, X_3) \vec{j} + h_3^i(X_1, X_2, X_3) \vec{k}, \quad (3.118)$$

vrijedi:

$$\frac{\partial h_1^i}{\partial u} = \frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} \quad (3.119a)$$

$$\frac{\partial h_2^i}{\partial u} = \frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} \quad (3.119b)$$

$$\frac{\partial h_3^i}{\partial u} = \frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} \quad (3.119c)$$

$$\frac{\partial h_1^i}{\partial v} = \frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v} \quad (3.119d)$$

$$\frac{\partial h_2^i}{\partial v} = \frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v} \quad (3.119e)$$

$$\frac{\partial h_3^i}{\partial v} = \frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v}. \quad (3.119f)$$

Uvrštavanjem posljednjih izraza u jednadžbu (3.117), komponente promjene vektora normale glase:

$$\begin{aligned} \delta N_1 = & \frac{\partial X_2}{\partial u} \left(\frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) - \\ & - \frac{\partial X_3}{\partial u} \left(\frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} \right) \frac{\partial X_3}{\partial v} - \\ & - \left(\frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} \right) \frac{\partial X_2}{\partial v} \end{aligned} \quad (3.120a)$$

$$\begin{aligned} \delta N_2 = & \frac{\partial X_3}{\partial u} \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) - \\ & - \frac{\partial X_1}{\partial u} \left(\frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} \right) \frac{\partial X_1}{\partial v} - \\ & - \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} \right) \frac{\partial X_3}{\partial v} \end{aligned} \quad (3.120b)$$

$$\begin{aligned} \delta N_3 = & \frac{\partial X_1}{\partial u} \left(\frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) - \\ & - \frac{\partial X_2}{\partial u} \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} \right) \frac{\partial X_2}{\partial v} - \\
& - \left(\frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} \right) \frac{\partial X_1}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{3.120c}$$

Nakon sređivanja, dobiva se:

$$\begin{aligned}
\delta N_1 = & \frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} \left(\frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} - \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} \right) + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} \left(\frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} \right) + \\
& + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \left(\frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} - \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} \right) + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} \left(-\frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) + \\
& + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \left(-\frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} \left(-\frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} + \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right)
\end{aligned} \tag{3.121a}$$

$$\begin{aligned}
\delta N_2 = & \frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} \left(\frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} - \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} \left(\frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) + \\
& + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} \left(\frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} - \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} \right) + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} \left(-\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} \right) + \\
& + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} \left(-\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} \right) + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \left(-\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} + \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} \right)
\end{aligned} \tag{3.121b}$$

$$\begin{aligned}
\delta N_3 = & \frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} - \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} \right) + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} \right) + \\
& + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} - \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} \right) + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} \left(-\frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} \right) + \\
& + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} \left(-\frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} \right) + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} \left(-\frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} + \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} \right).
\end{aligned} \tag{3.121c}$$

Članovi u zagradama različiti od nule jednaki su komponentama vektora normale na površinu, izraz (3.109), tako da konačne vrijednosti komponenti promjene vektora normale glase:

$$\begin{aligned}
\delta N_1 = & -\frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} N_3 + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} N_1 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} N_2 + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} N_1 = \\
= & \left(\frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \right) N_1 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} N_2 - \frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} N_3
\end{aligned} \tag{3.122a}$$

$$\begin{aligned}
\delta N_2 &= \frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} N_2 - \frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} N_1 - \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} N_3 + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} N_2 = \\
&= -\frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} N_1 + \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \right) N_2 - \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} N_3
\end{aligned} \tag{3.122b}$$

$$\begin{aligned}
\delta N_3 &= \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} N_3 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} N_2 + \frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} N_3 - \frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} N_1 = \\
&= -\frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} N_1 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} N_2 + \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \right) N_3,
\end{aligned} \tag{3.122c}$$

odnosno, promjena vektora normale iznosi:

$$\begin{aligned}
\delta \vec{N} &= \left[\left(\frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \right) N_1 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} N_2 - \frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} N_3 \right] \vec{i} + \\
&+ \left[-\frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} N_1 + \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \right) N_2 - \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} N_3 \right] \vec{j} + \\
&+ \left[-\frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} N_1 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} N_2 + \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \right) N_3 \right] \vec{k}.
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Izjednačavanjem jednadžbi (3.107) i (3.110) dobiva se:

$$d\vec{S} = \vec{N} du dv = \vec{n} dS, \tag{3.124}$$

tako da i promjena jediničnog vektora normale na površinu (za i-ti prirodni oblik) ima isti oblik poput izraza (3.123):

$$\begin{aligned}
\delta \vec{n}^i &= \left[\left(\frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \right) n_1 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} n_2 - \frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} n_3 \right] \vec{i} + \\
&+ \left[-\frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} n_1 + \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \right) n_2 - \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} n_3 \right] \vec{j} + \\
&+ \left[-\frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} n_1 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} n_2 + \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \right) n_3 \right] \vec{k}.
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Doprinos promjeni hidrostatsičkog dijela modalne povratne sile i-tog oblika vibriranja zbog promjene vektora normale:

$$\delta F_i^{hsn} = -\rho g \iint_{S_B} X_3 \vec{h}^i \sum_{j=1}^{6+N} \delta \vec{n}^j \xi_j dS = -\sum_{j=1}^{6+N} C_{ij}^{hsn} \xi_j, \quad (3.126)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} C_{ij}^{hsn} &= \rho g \iint_{S_B} X_3 (\vec{h}^i \cdot \delta \vec{n}^j) dS = \rho g \iint_{S_B} X_3 (h_1^i \cdot \delta n_1^j + h_2^i \cdot \delta n_2^j + h_3^i \cdot \delta n_3^j) dS = \\ &= \rho g \iint_{S_B} X_3 \left\{ \left[\left(\frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \right) n_1 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_1} n_2 - \frac{\partial h_3^i}{\partial X_1} n_3 \right] h_1^i \right\} dS + \\ &+ \rho g \iint_{S_B} X_3 \left\{ \left[-\frac{\partial h_1^i}{\partial X_2} n_1 + \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} + \frac{\partial h_3^i}{\partial X_3} \right) n_2 - \frac{\partial h_3^i}{\partial X_2} n_3 \right] h_2^i \right\} dS + \\ &+ \rho g \iint_{S_B} X_3 \left\{ \left[-\frac{\partial h_1^i}{\partial X_3} n_1 - \frac{\partial h_2^i}{\partial X_3} n_2 + \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial X_1} + \frac{\partial h_2^i}{\partial X_2} \right) n_3 \right] h_3^i \right\} dS \end{aligned} \quad (3.127)$$

Kako bi se dobila potpuna matrica povratne sile, uz djelovanje hidrostatskog tlaka potrebno je obuhvatiti i utjecaj gravitacijske sile:

$$\vec{F}^m = -\iiint_V \rho g \vec{k} dV = -\iiint_V g \vec{k} dm. \quad (3.128)$$

Rad gravitacijske sile na pomacima i-tog prirodnog oblika naziva se gravitacijskim dijelom modalne povratne sile:

$$F_i^m = -\iiint_V g \vec{h}^i \vec{k} dm. \quad (3.129)$$

Kao i u slučaju hidrostatskog dijela modalne povratne sile, potrebno je uključiti samo njenu varijaciju, tj. razliku između trenutne i početne vrijednosti:

$$\delta F_i^m = -\iiint_V g (\vec{h}^i + \delta \vec{h}^i) \vec{k} dm + \iiint_V g \vec{h}^i \vec{k} dm = -\iiint_V g \delta \vec{h}^i \cdot \vec{k} dm, \quad (3.130a)$$

što, uz izraz (3.102) za promjenu vektora i-tog prirodnog oblika, daje:

$$\begin{aligned} \delta F_i^m &= -g \iiint_V \left[\sum_{j=1}^{6+N} \xi_j (\nabla \vec{h}^j) \vec{h}^i \right] \cdot \vec{k} dm = -\sum_{j=1}^{6+N} \xi_j g \iiint_V (\nabla \vec{h}^j) \vec{h}^i \cdot \vec{k} dm = \\ &= -\sum_{j=1}^{6+N} \xi_j g \iiint_V (\nabla \vec{h}^j) h_3^i dm = -\sum_{j=1}^{6+N} C_{ij}^m \xi_j, \end{aligned} \quad (3.130b)$$

gdje je:

$$C_{ij}^m = g \iiint_V (\nabla \vec{h}^j) h_3^i dm = g \iiint_V \left(h_1^j \frac{\partial h_3^i}{\partial x_1} + h_2^j \frac{\partial h_3^i}{\partial x_2} + h_3^j \frac{\partial h_3^i}{\partial x_3} \right) dm. \quad (3.131)$$

Ukupni koeficijenti povratne sile dobivaju se zbrajanjem svih sastavnica:

$$C_{ij} = C_{ij}^{hsp} + C_{ij}^{hsh} + C_{ij}^{hsn} + C_{ij}^m, \quad (3.132a)$$

tako da izraz za povratnu silu ima sljedeći oblik:

$$\delta F_i = \delta F_i^{hs} + \delta F_i^m = - \sum_{j=1}^{6+N} C_{ij} \xi_j. \quad (3.132b)$$

Hidrodinamički dio

Uzimanjem u obzir periodičkog karaktera potencijala i sile:

$$\Phi = \text{Re} \{ \tilde{\phi} e^{-i\omega_e t} \} \quad (3.133)$$

$$F_i^{hd} = \text{Re} \{ \tilde{f}_i^{hd} e^{-i\omega_e t} \}, \quad (3.134)$$

izraz za hidrodinamički dio modalne ukupne sile na tijelo glasi:

$$\tilde{f}_i^{hd} e^{-i\omega_e t} = -\rho \iint_{S_B} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\phi} e^{-i\omega_e t} \tilde{h}^i \cdot \vec{n} dS = i\omega_e \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi} e^{-i\omega_e t} \tilde{h}^i \cdot \vec{n} dS, \quad (3.135)$$

tako da je amplituda hidrodinamičke modalne sile:

$$\tilde{f}_i^{hd} = i\omega_e \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi} \tilde{h}^i \cdot \vec{n} dS. \quad (3.136a)$$

Ukupni se potencijal, prema jednadžbama (3.81a) i (3.81b), sastoji od potencijalâ nailaznog, difrakcijskog i radijacijskog vala, tako da se i amplituda ukupne hidrodinamičke modalne sile:

$$\tilde{f}_i^{hd} = i\omega_e \rho \iint_{S_B} (\tilde{\phi}_I + \tilde{\phi}_D + \tilde{\phi}^R) \tilde{h}^i \cdot \vec{n} dS, \quad (3.136b)$$

može podijeliti na dva dijela, od kojih jedan ovisi, a drugi ne ovisi o deformacijama konstrukcije:

$$\tilde{f}_i^{hd} = \tilde{f}_i^{DI} + \tilde{f}_i^R, \quad (3.136c)$$

gdje je:

$$\tilde{f}_i^{DI} = i\omega_e \rho \iint_{S_B} (\tilde{\phi}_I + \tilde{\phi}_D) \tilde{h}^i \cdot \vec{n} dS = \tilde{f}_i^I + \tilde{f}_i^D \quad (3.137)$$

amplituda čiste modalne uzbude, neovisna o deformacijama konstrukcije, sastavljena od amplitude Froude-Krylovljeve modalne sile uslijed nailaznih valova:

$$\tilde{f}_i^I = i\omega_e \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}_I \tilde{h}^i \cdot \vec{n} dS \quad (3.138)$$

i amplitude difrakcijske uzbudne modalne sile uslijed difrakcijskih valova:

$$\tilde{f}_i^D = i\omega_e \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}_D \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS. \quad (3.139)$$

Amplituda radijacijske modalne sile:

$$\tilde{f}_i^R = i\omega_e \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}^R \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS, \quad (3.140a)$$

uvrštavanjem izraza (3.90) za potencijal radijacijskog vala sastavljenog od $6+N$ komponenti prelazi u:

$$\tilde{f}_i^R = i\omega_e \rho \iint_{S_B} \left(-i\omega_e \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \tilde{\phi}_j^R \right) \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS = \omega_e^2 \rho \sum_{j=1}^{6+N} \iint_{S_B} \tilde{\xi}_j \tilde{\phi}_j^R \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS. \quad (3.140b)$$

Budući da ovaj dio hidrodinamičke modalne sile ovisi o deformacijama konstrukcije, može se prikazati u obliku linearne kombinacije radijacijskih modalnih sila uslijed pojedinih pomaka:

$$\tilde{f}_i^R = \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{f}_{ij}^R \tilde{\xi}_j \quad i = 1, \dots, 6+N, \quad (3.140c)$$

gdje je:

$$\tilde{f}_{ij}^R = \omega_e^2 \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}_j^R \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS \quad i, j = 1, \dots, 6+N \quad (3.141a)$$

kompleksna amplituda radijacijske sile i -tog prirodnog oblika zbog jediničnog pomaka j -tog oblika. Ta se amplituda u pravilu razdvaja na realni i imaginarni dio [57, 61]:

$$\tilde{f}_{ij}^R = \omega_e^2 A_{ij} + i\omega_e B_{ij}, \quad (3.141b)$$

gdje su A_{ij} i B_{ij} koeficijenti dodatne mase i prigušenja i -tog oblika zbog jediničnog pomaka j -tog oblika. Izjednačavanjem posljednja dva izraza:

$$\omega_e^2 A_{ij} = \operatorname{Re} \left\{ \omega_e^2 \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}_j^R \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS \right\} \quad (3.142a)$$

$$i\omega_e B_{ij} = \operatorname{Im} \left\{ \omega_e^2 \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}_j^R \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS \right\}, \quad (3.143a)$$

dobivaju se izrazi za elemente matrica dodatne mase i prigušenja kao modalnih veličina:

$$A_{ij} = \operatorname{Re} \left\{ \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}_j^R \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS \right\} \quad i, j = 1, \dots, 6+N \quad (3.142b)$$

$$B_{ij} = \text{Im} \left\{ \omega_e \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}_j^R \tilde{h}^i \cdot \vec{n} dS \right\} \quad i, j = 1, \dots, 6 + N. \quad (3.143b)$$

Ukoliko se uzme u obzir rubni uvjet na oplakanoj površini, jednadžba (3.88e), gornji se izrazi mogu napisati i u sljedećem obliku:

$$A_{ij} = \text{Re} \left\{ \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}_j^R \frac{\partial \tilde{\phi}_i^R}{\partial \vec{n}} dS \right\} \quad i, j = 1, \dots, 6 + N \quad (3.142c)$$

$$B_{ij} = \text{Im} \left\{ \omega_e \rho \iint_{S_B} \tilde{\phi}_j^R \frac{\partial \tilde{\phi}_i^R}{\partial \vec{n}} dS \right\} \quad i, j = 1, \dots, 6 + N. \quad (3.143c)$$

Nazivi tih koeficijenata proizlaze iz njihovog fizikalnog značaja u jednadžbi gibanja. Realni dio radijacijske sile u fazi je s ubrzanjem, tako da djeluje kao prividna masa koja povećava masu vibrirajućeg tijela. Slično tome, imaginarni je dio u fazi s brzinom, što odgovara koeficijentu prigušenja sile otpora u jednadžbi gibanja.

Poteškoću u rješavanju problema njihanja elastičnog broda na harmonijskim valovima predstavlja određivanje koeficijenata dodatne mase i prigušenja te difrakcijske komponente uzbudne sile koji se dobivaju složenim hidrodinamičkim proračunima. Svi su ti hidrodinamički koeficijenti (a uz njih još i Froude-Krylovljeva komponenta uzbudne sile) konstantni za zadanu frekvenciju i stoga je jednadžbu njihanja lakše rješavati u frekvencijskom području.

3.5. Utjecaj brzine napredovanja

Razmatranja iz prethodnog potpoglavlja ne mogu se primijeniti za analizu broda koji na valovima napreduje stalnom brzinom U . U tom se slučaju ukupni potencijal sastoji od stacionarnog (o vremenu neovisnog) i nestacionarnog (o vremenu ovisnog) dijela [23, 31, 61, 62, 63]:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; t) = \phi_s'(x_1, x_2, x_3) + \Phi_n(x_1, x_2, x_3; t), \quad (3.144a)$$

pri čemu se stacionarni dio:

$$\phi_s'(x_1, x_2, x_3) = -Ux_1 + \phi_s(x_1, x_2, x_3) \quad (3.144b)$$

sastoji od stalnog potencijala strujanja, brzine $-U$, u smjeru pozitivne osi X_1' (ili X_1^*), slika 3.6, te stacionarnog perturbacijskog potencijala koji opisuje izmjenu tog strujanja uslijed

prisutnosti tijela; dok za nestacionarni dio vrijede izrazi (3.81a) i (3.81b) iz prethodnog potpoglavlja:

$$\Phi_n(x_1, x_2, x_3; t) = \Phi_I(x_1, x_2, x_3; t) + \Phi_D(x_1, x_2, x_3; t) + \Phi_R(x_1, x_2, x_3; t). \quad (3.144c)$$

Vektor brzine čestice fluida, jednačba (3.20a), uvrštavanjem izrazâ (3.144a) i (3.144b) prelazi u:

$$\vec{v} = \nabla\Phi = \nabla(-Ux_1 + \phi_s + \Phi_n) = \vec{w} + \nabla\Phi_n, \quad (3.145a)$$

gdje je:

$$\vec{w} = -U\vec{i} + \nabla\phi_s \quad (3.145b)$$

vektor brzine čestice fluida zbog stacionarnog napredovanja broda.

Kod dosljedne primjene linearne teorije, iako je moguće odvojeno rješavati stacionarni i nestacionarni problem, problemi rubnih vrijednosti za određivanje nestacionarnih komponenti potencijala brzine strujanja ne mogu se riješiti bez uzimanja u obzir međudjelovanja dviju komponenti ukupnog potencijala [61].

Uvrštavanjem vektora brzine (3.145a) u rubni uvjet na (trenutnoj) oplakanoj površini (3.62a):

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad na \hat{S}_B,$$

uz njegovo zadovoljavanje (linearizacija!) na srednjoj oplakanoj površini, $\hat{S}_B \approx S_B$, te izraz za trenutnu normalu na oplakanu površinu:

$$\vec{n} = \vec{n} + \delta\vec{n}, \quad (3.146)$$

pri čemu je vektor promjene normale $\delta\vec{n}$ dan jednačbom (3.125), daje:

$$(\vec{w} + \nabla\Phi_n) \cdot (\vec{n} + \delta\vec{n}) = \vec{U} \cdot (\vec{n} + \delta\vec{n}) = \vec{H}(t) \cdot (\vec{n} + \delta\vec{n}) \quad na S_B, \quad (3.147a)$$

gdje je $\vec{H}(t)$ vektor brzine točke na oplakanoj površini dan izrazom (3.79). Sređivanjem gornjeg izraza:

$$\vec{w} \cdot \vec{n} + \vec{w} \cdot \delta\vec{n} + \nabla\Phi_n \cdot \vec{n} + \nabla\Phi_n \cdot \delta\vec{n} = \vec{H}(t) \cdot \vec{n} + \vec{H}(t) \cdot \delta\vec{n} \quad na S_B, \quad (3.147b)$$

uz zanemarivanje umnožaka nestacionarnih komponenti koji predstavljaju male veličine višeg reda (budući da se linearna teorija temelji na pretpostavki malih veličina (ne)stacionarnog gibanja fluida), dobiva se [23, 31, 63]:

$$\vec{w} \cdot \vec{n} + \vec{w} \cdot \vec{\delta n} + \nabla \Phi_n \cdot \vec{n} = \vec{H}(t) \cdot \vec{n} \quad na S_B. \quad (3.147c)$$

Stacionarni rubni uvjet na oplakanoj površini postaje [31]:

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad na S_B, \quad (3.148a)$$

odnosno:

$$U \vec{i} \cdot \vec{n} = \nabla \phi_s \cdot \vec{n} \quad na S_B. \quad (3.148b)$$

Slično tome, uvjet nepromočivosti kod nestacionarnog problema rubnih vrijednosti glasi:

$$\vec{w} \cdot \vec{\delta n} + \nabla \Phi_n \cdot \vec{n} = \vec{H}(t) \cdot \vec{n} \quad na S_B, \quad (3.149a)$$

odnosno [23]:

$$\nabla \Phi_n \cdot \vec{n} = \vec{H}(t) \cdot \vec{n} - \vec{w} \cdot \vec{\delta n} \quad na S_B, \quad (3.149b)$$

gdje posljednji član obuhvaća međudjelovanje stacionarnog i nestacionarnog strujanja. Uz:

$$\Phi_n = \text{Re} \left\{ \left(\phi_I + \phi_D - i\omega_e \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \tilde{\phi}_j^R \right) e^{-i\omega_e t} \right\}, \quad (3.150)$$

$$\vec{H}(t) = \text{Re} \left\{ i\omega_e \tilde{H} e^{-i\omega_e t} \right\} = \text{Re} \left\{ -i\omega_e \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \vec{h}_j e^{-i\omega_e t} \right\} \quad (3.151)$$

i

$$\vec{\delta n} = \text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \vec{\delta n}_j e^{-i\omega_e t} \right\}, \quad (3.152)$$

iz (3.149b) slijedi:

$$\nabla \left(\tilde{\phi}_I + \tilde{\phi}_D - i\omega_e \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \tilde{\phi}_j^R \right) \cdot \vec{n} = -i\omega_e \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \vec{h}_j \cdot \vec{n} - \vec{w} \cdot \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \vec{\delta n}_j \quad na S_B. \quad (3.149c)$$

Posljednji se izraz može razdvojiti na rubni uvjet na površini tijela za problem difrakcije:

$$\nabla \tilde{\phi}_D \cdot \vec{n} = -\nabla \tilde{\phi}_I \cdot \vec{n} \quad na S_B, \quad (3.153)$$

jednak onom (3.82d), izvedenom u prethodnom potpoglavlju, i uvjet nepromočivosti za problem radijacije [64]:

$$\nabla \tilde{\phi}_j^R \cdot \vec{n} = \vec{h}_j \cdot \vec{n} + \frac{1}{i\omega_e} \vec{w} \cdot \vec{\delta n}_j \quad na S_B, \quad (3.154)$$

koji se razlikuje od uvjeta (3.88e) za plutajuću konstrukciju.

Iz jednadžbi za ukupni potencijal (3.144a) i (3.144b) i kinematičkog rubnog uvjeta na slobodnoj površini (3.27b):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \quad na \quad x_3 = \zeta ,$$

slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} (-Ux_1 + \phi_s + \Phi_n) &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (-Ux_1 + \phi_s + \Phi_n) \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} (-Ux_1 + \phi_s + \Phi_n) \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \quad na \quad x_3 = \zeta . \end{aligned} \quad (3.155a)$$

Lineariziranjem ovog rubnog uvjeta (zanemarivanjem malih veličina drugog reda), analogno postupku provedenom za Airyjeve valove, dobiva se:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} (\phi_s + \Phi_n) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} - U \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \quad na \quad x_3 = 0 . \quad (3.155b)$$

Za stacionarni problem rubnih vrijednosti vrijedi [23, 31]:

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial x_3} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = 0 \quad na \quad x_3 = 0 , \quad (3.156)$$

a za onaj nestacionarni [23, 31]:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_3} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = 0 \quad na \quad x_3 = 0 . \quad (3.157)$$

Slično tome, iz dinamičkog rubnog uvjeta na slobodnoj površini (3.28b):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 - U^2 \right] + gx_3 = 0 \quad na \quad x_3 = \zeta , \quad (3.158a)$$

proizlazi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (-Ux_1 + \phi_s + \Phi_n) + \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (-Ux_1 + \phi_s + \Phi_n) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (-Ux_1 + \phi_s + \Phi_n) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (-Ux_1 + \phi_s + \Phi_n) \right]^2 - U^2 \right\} + gx_3 = 0 \quad na \quad x_3 = \zeta , \end{aligned} \quad (3.158b)$$

odnosno, nakon sređivanja:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(-U + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_3} \right)^2 - U^2 \right] +$$

$$gx_3 = 0 \quad na \quad x_3 = \zeta . \quad (3.158c)$$

Iz posljednjeg izraza slijedi:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[U^2 + \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right)^2 - 2U \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} - 2U \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial \phi_s}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_3} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi_s}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_3} - U^2 \right] + gx_3 = 0 \quad na \quad x_3 = \zeta , \quad (3.158d)$$

što, nakon lineariziranja, daje:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(-2U \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} - 2U \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right) + gx_3 = 0 \quad na \quad x_3 = \zeta , \quad (3.158e)$$

odnosno:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} - U \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} - U \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} + gx_3 = 0 \quad na \quad x_3 = \zeta . \quad (3.158f)$$

Ponovno se rubni uvjet može rastaviti na dio koji se odnosi na stacionarni:

$$-U \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} + gx_3 = 0 \quad na \quad x_3 = \zeta \quad (3.159)$$

i onaj koji vrijedi za nestacionarni problem rubnih vrijednosti:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} - U \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} + gx_3 = 0 \quad na \quad x_3 = \zeta . \quad (3.160)$$

Ukoliko se iz jednadžbe (3.159) izvuče:

$$\zeta = \frac{U}{g} \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} \quad (3.161a)$$

i uvrsti u izraz (3.156) dobiva se:

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial x_3} + U \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{U}{g} \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} \right) = 0 \quad na \quad x_3 = 0 , \quad (3.161b)$$

stacionarni jedinstveni (linearizirani) rubni uvjet na slobodnoj površini:

$$g \frac{\partial \phi_s}{\partial x_3} + U^2 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x_1^2} = 0 \quad na \quad x_3 = 0 . \quad (3.161c)$$

Na isti se način, iz jednadžbi (3.160):

$$\zeta = \frac{U}{g} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \quad (3.162a)$$

i (3.157):

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U}{g} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \right) + U \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{U}{g} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \right) = 0 \quad na \ x_3 = 0, \quad (3.162b)$$

dobiva [64]:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_3} - \frac{2U}{g} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x_1 \partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} + \frac{U^2}{g} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x_1^2} = 0 \quad na \ x_3 = 0, \quad (3.162c)$$

jedinstveni (linearizirani) rubni uvjet na slobodnoj površini koji treba zadovoljiti nestacionarni dio ukupnog potencijala brzine strujanja [63]:

$$g \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \Phi_n = 0 \quad na \ x_3 = 0. \quad (3.162d)$$

Kod proračuna ukupne sile na tijelo integriranjem tlaka po oplakanoj površini, više nije moguće (potpuno) zanemariti kvadrat brzine fluida u pojedinim točkama, već je, prema jednadžbama (3.158a)-(3.158f):

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 - U^2 \right] = -U \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} - U \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}, \quad (3.163)$$

tako da za tlak, umjesto izraza (3.94), sada vrijedi:

$$p = -\rho g x_3 - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho U \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} - \rho U \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}. \quad (3.164)$$

Zbog promjene tlaka mijenja se i hidrodinamički dio ukupne sile na tijelo, jednadžba (3.96a):

$$\vec{F}^{hd} = -\rho \iint_{S_B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} - U \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right) \vec{n} dS, \quad (3.165a)$$

odnosno, hidrodinamički dio modalnih sila, izraz (3.96b):

$$F_i^{hd} = -\rho \iint_{S_B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} - U \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right) \vec{h}^i \vec{n} dS, \quad (3.165b)$$

iz kojeg se računaju hidrodinamički koeficijenti dodatne mase i prigušenja te valna uzbudna sila, sastavljena od Froude-Krylovljeve i difrakcijske komponente.

Ne samo da se, zbog promjene rubnih uvjeta na slobodnoj i oplakanoj površini, mijenjaju već obrađeni problemi difrakcije i radijacije, već je potrebno riješiti i dodatni problem rubnih vrijednosti.

Matematički model za rješavanje problema napredovanja broda konstantnom brzinom na inače mirnom moru sačinjavaju Laplaceova jednadžba (3.25), uvjet nepromočivosti na dnu mora (3.26), radijacijski uvjet u beskonačnosti (3.85b), jedinstveni rubni uvjet na slobodnoj površini (3.161c) te rubni uvjet na oplakanoj površini (3.148b).

I ovakav, linearizirani problem još je uvijek izuzetno složen, tako da se najčešće pribjegava dodatnim pojednostavljenjima. U slučaju vitkog broda koji ne napreduje velikom brzinom, obično se zanemaruje stacionarni perturbacijski potencijal ϕ_s . To dovodi do pojednostavljenja izraza za hidrodinamički dio modalnih sila (3.165b):

$$F_i^{hd} = -\rho \iint_{S_B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right) \tilde{h}^i \tilde{n} dS, \quad (3.166)$$

a time i jednadžbe (3.136a) za njihove amplitude:

$$\tilde{f}_i^{hd} = \rho \iint_{S_B} \left(i\omega_e \tilde{\phi}_n + U \frac{\partial \tilde{\phi}_n}{\partial x_1} \right) \tilde{h}^i \cdot \tilde{n} dS. \quad (3.167)$$

Nestacionarni se potencijal, prema izrazima (3.81a), (3.81b) i (3.90) sastoji od potencijala nailaznog vala, potencijala difrakcijskog vala i potencijala radijacijskog vala (kao linearne kombinacije potencijala radijacijskih valova zbog jediničnih pomaka):

$$\tilde{\phi}_n = \tilde{\phi}_I + \tilde{\phi}_D - i\omega_e \sum_{j=1}^{6+N} \tilde{\xi}_j \tilde{\phi}_j^R. \quad (3.168)$$

Primjenom gornje jednadžbe, iz amplituda hidrodinamičkih modalnih sila proizlaze amplitude Froude-Krylovjevih modalnih uzbudnih sila (3.138) [23, 63]:

$$\tilde{f}_i^I = \rho \iint_{S_B} \left(i\omega_e \tilde{\phi}_I - U \frac{\partial \tilde{\phi}_I}{\partial x_1} \right) \tilde{h}^i \cdot \tilde{n} dS, \quad (3.169)$$

amplitude difrakcijskih modalnih uzbudnih sila (3.139) [23, 63]:

$$\tilde{f}_i^D = \rho \iint_{S_B} \left(i\omega_e \tilde{\phi}_D - U \frac{\partial \tilde{\phi}_D}{\partial x_1} \right) \tilde{h}^i \cdot \tilde{n} dS, \quad (3.170)$$

koeficijenti dodatne mase (3.142b) [23, 31, 63, 64, 65]:

$$A_{ij} = \frac{\rho}{\omega_e^2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{S_B} \left(\omega_e^2 \tilde{\phi}_j^R - i\omega_e U \frac{\partial \tilde{\phi}_j^R}{\partial x_1} \right) \tilde{h}^i \cdot \tilde{n} dS \right\} \quad (3.171)$$

i koeficijenta prigušenja (3.143b) [23, 31, 63, 64, 65]:

$$B_{ij} = \frac{\rho}{\omega_e} \text{Im} \left\{ \iint_{S_B} \left(\omega_e^2 \tilde{\phi}_j^R - i \omega_e U \frac{\partial \tilde{\phi}_j^R}{\partial x_1} \right) \vec{h}^i \cdot \vec{n} dS \right\}. \quad (3.172)$$

Budući da, kod rješavanja problemâ difrakcije i radijacije, jedinstveni rubni uvjet na slobodnoj površini (3.162d) znatno komplicira određivanje odgovarajuće Greenove funkcije, program HYDROSTAR Bureau Veritasa primjenjuje [64] metodu susretne frekvencije (engl. *encounter frequency method*) koja koristi rubni uvjet na slobodnoj površini (3.34) koji vrijedi za plutajuće tijelo:

$$g \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{na} \quad x_3 = 0.$$

Na taj se način učinci brzine broda, uz promjenu uvjeta nepromočivosti na oplakanoj površini kod rješavanja radijacijskog problema, obuhvaćaju samo promjenom frekvencije vala. Ne postoji teorijsko opravdanje za primjenu ove intuitivne metode, ali je nekoliko autora izvjestilo kako metoda zadovoljava praktične potrebe [64]. Ostaje, dakle, zanimljiv zadatak teorijskog potvrđivanja intuitivnog rješenja fizikalnog problema.

3.6. Metoda integralnih jednadžbi

Postoji više numeričkih metoda pomoću kojih se u trodimenzionalnom prostoru može riješiti problem njihanja (elastičnog) broda na harmonijskim valovima, odnosno (pot)problem određivanja potencijala brzine kod radijacijsko-difrakcijskih modela.

Umjesto rješavanja jedne integralne jednadžbe za čitavo područje fluida, primjena metode konačnih elemenata ili metode konačnih razlika, na primjer, vodi do rješavanja skupa jednadžbi za pojedine elemente tekućine, utemeljenih na međusobnim vezama tih elemenata. Potreba za modeliranjem (beskonačnog) okolnog fluida, koja dovodi do poteškoća pri ograničavanju područja problema i postavljanju odgovarajućih rubnih uvjeta, predstavlja osnovni nedostatak takvih metoda. Osim toga, takvi problemi prilični su opsežni [54].

Kod metode rubnih elemenata, zasnovane na primjeni druge Greenove jednadžbe, nije potrebno modelirati čitavo područje tekućine, već samo njenu rubnu površinu. Na taj se način dobiva sustav sa znatno manje linearnih jednadžbi.

Program HYDROSTAR Bureau Veritasa koristi metodu (rubnih) integralnih jednadžbi (miješanu metodu razdiobe singularitetâ), također utemeljenu na drugoj Greenovoj jednadžbi, odnosno na razvijanju jednadžbe površinskog integrala i njenom rješavanju diskretiziranjem rub(ov)â područja problema. Obično je, ovisno o izboru Greenove funkcije, potrebno modelirati samo oplakanu površinu tijela. Samo u iznimnim slučajevima modelira se i slobodna površina.

U teoriji potencijalnog (nevtložnog) strujanja vrijedi princip superpozicije po kojem svaka linearna kombinacija rješenjâ Laplaceove jednadžbe i sama predstavlja njeno rješenje. Stoga je složena strujanja moguće simulirati pomoću niza jednostavnih. Prisutnost tijela u polju strujanja, na primjer, može se predstaviti prikladnim kombinacijama izvora i ponora, ili dipola. Budući da ti (matematički) singulariteti lokalno ne zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu, nužno je da se nalaze unutar tijela koje modeliraju, ili, u graničnom slučaju, na njegovoj površini. Složeno tijelo, poput broda, modelira se neprekinutom razdiobom izvora i dipola po uronjenom dijelu svoje površine.

Ukoliko se u Gaussov teorem divergencije, jednadžba (3.5a), uvrsti sljedeća vektorska funkcija:

$$\vec{F} = u \nabla v, \quad (3.173a)$$

slijedi [62]:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ \iiint_V \nabla(u \nabla v) dV &= \iint_S u(\nabla v) \vec{n} dS \\ \iiint_V (u \nabla^2 v + \nabla u \nabla v) dV &= \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS, \end{aligned} \quad (3.174a)$$

odakle proizlazi prva Greenova jednadžba:

$$\iiint_V u \nabla^2 v dV = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_V \nabla u \nabla v dV. \quad (3.174b)$$

Analogno tome, za:

$$\vec{F} = v \nabla u, \quad (3.173b)$$

vrijedi:

$$\iiint_V v \nabla^2 u dV = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_V \nabla v \nabla u dV. \quad (3.174c)$$

Oduzimanjem izraza (3.174c) od onog (3.174b), dobiva se:

$$\iiint_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (3.175)$$

druga Greenova jednačba.

Za dva proizvoljna rješenja Laplaceove jednačbe, ϕ i φ , ta jednačba glasi [52, 53]:

$$\iint_S \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (\phi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \phi) dV. \quad (3.176a)$$

Budući da oba potencijala brzine zadovoljavaju Laplaceovu jednačbu, iz gornjeg izraza proizlazi:

$$\iint_S \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (3.176b)$$

Jedan od potencijala može se zamijeniti potencijalom izvora (jedinичne snage), smještenom u točki S (x_1^S, x_2^S, x_3^S) :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi r}, \quad (3.177)$$

gdje je:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^S)^2 + (x_2 - x_2^S)^2 + (x_3 - x_3^S)^2}. \quad (3.178)$$

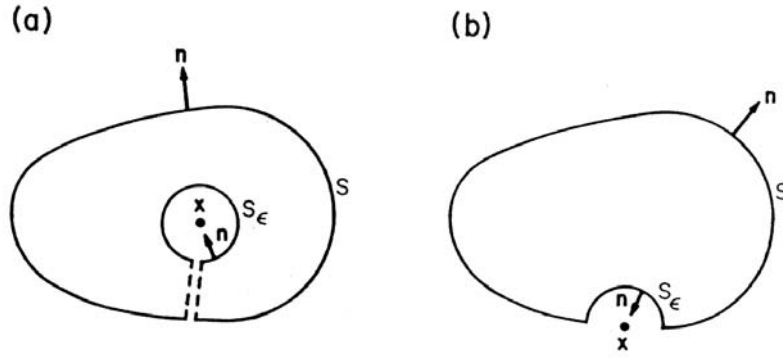
Vidljivo je da potencijal brzine u točki P (x_1, x_2, x_3) ovisi samo o udaljenosti između te točke i one u kojoj je smješten izvor, tako da izraz (3.177) vrijedi i u slučaju zamjene tih dviju točaka.

Kako potencijal φ ne zadovoljava Laplaceovu jednačbu u točki S, moguće je primijeniti izraz (3.176b) ukoliko se izvor okruži malom (polu)sferom polumjera ε , slika 3.11:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S+S_\varepsilon} \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (3.179a)$$

odnosno:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS. \quad (3.179b)$$



Slika 3.11 Površine integracije za Greenov teorem za a) sferu i b) polusferu [52]

Za male vrijednosti ε (koje teže k nuli), može se pretpostaviti da je vrijednost potencijala ϕ konstantna po površini sfere, tako da vrijedi [52, 53]:

$$-\frac{1}{4\pi} \phi \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS = -\frac{1}{4\pi} \phi \iint_{S_\varepsilon} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) dS = -\frac{1}{4\pi} \phi \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = -\phi \quad (3.180a)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \approx 0. \quad (3.180b)$$

Uključivanjem gornjih integrala po sferi, iz jednadžbe (3.179b) proizlazi da je:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (3.181a)$$

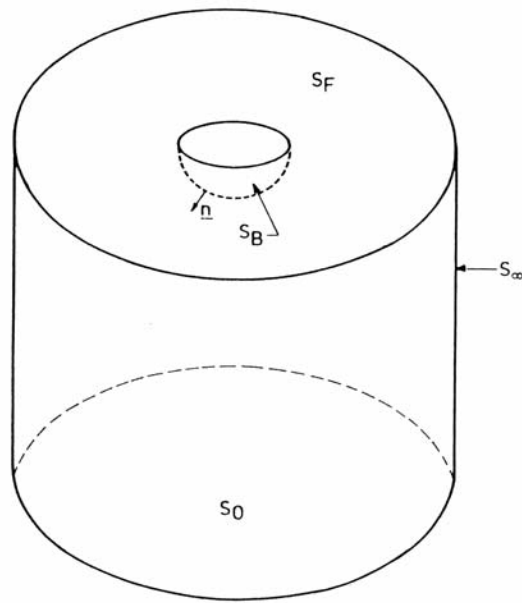
potencijal brzine u točki unutar volumena fluida omeđenog zatvorenom površinom izražen preko razdiobe dipola (momenta ϕ) i izvora (jakosti $-\frac{\partial \phi}{\partial n}$) na toj rubnoj površini S .

Kad se točka P nalazi na rubnoj površini, doprinos polusfere dvostruko je manji od onog sfere u izrazu (3.180a), tako da je:

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS. \quad (3.181b)$$

Posljednje dvije integralne jednadžbe koriste se za određivanje potencijala brzine uslijed gibanja tijela u neograničenom fluidu.

U slučaju njihanja broda na harmonijskim valovima, zatvorena površina S sastavljena je od oplakane površine S_B , slobodne površine S_F , dna oceana S_0 i cilindrične površine S_∞ na velikoj udaljenosti od broda, slika 3.12.



Slika 3.12 Rubne površine [53]

Na svakoj od tih površina nametnuti su dodatni rubni uvjeti i stoga je prikladno izmijeniti potencijal izvora na način da zadovoljava iste rubne uvjete [52]:

$$G(\vec{x}, \vec{x}^s) = \frac{1}{r} + H(\vec{x}, \vec{x}^s), \quad (3.182a)$$

gdje je G Greenova funkcija, a H bilo koja funkcija koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu, odabirom koje se može postići da Greenova funkcija zadovoljava i neke od dodatnih rubnih uvjeta. Određivanje Greenove funkcije tim je složenije što više rubnih uvjeta ona zadovoljava, ali je, istovremeno, olakšano određivanje nepoznatog potencijala brzine, prema jednadžbi (3.181a) ili (3.181b). Greenova funkcija koja zadovoljava samo Laplaceovu jednadžbu (Rankineova metoda) srazmjerna je potencijalu izvora jedinične snage:

$$G(\vec{x}, \vec{x}^s) = \frac{1}{r}, \quad (3.182b)$$

tako da izrazi (3.181a) i (3.181b) prelaze u:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_B + S_F + S_0 + S_\infty} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (3.183a)$$

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_B + S_F + S_0 + S_\infty} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS. \quad (3.183b)$$

U Kelvinovoj metodi, Greenova funkcija uz Laplaceovu jednadžbu zadovoljava i sve rubne uvjete, osim onog na oplakanoj površini, tako da se potencijal brzine u točki unutar volumena fluida omeđenog zatvorenom površinom računa kao:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS, \quad (3.184a)$$

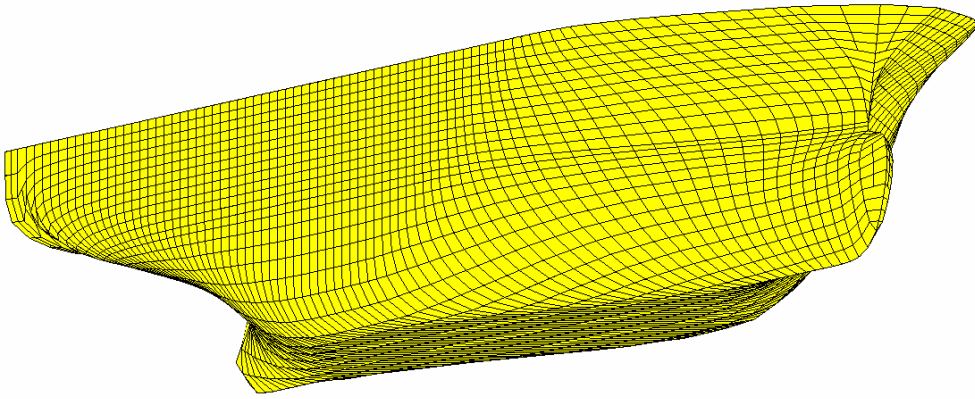
dok izraz za potencijal u točki na samoj rubnoj površini ima sljedeći oblik:

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_B} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS. \quad (3.184b)$$

Diskretiziranjem rubne (odnosno, u posljednjem slučaju, oplakane) površine nizom panela, slika 3.13, uz pretpostavku konstantne vrijednosti potencijala na svakom panelu, dobiva se:

$$\phi_i + \frac{1}{2\pi} \phi_i \sum_{j=1}^{N_P} \iint_{S_j} \frac{\partial G}{\partial n} dS_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_P} \iint_{S_j} G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS_j, \quad i = 1, \dots, N_P, \quad (3.185)$$

gdje je N_P ukupan broj panela oplakane površine, a S_j površina j-tog panela. Uz prethodno određivanje Greenove funkcije, ovaj se sustav linearnih jednadžbi rješava po nepoznatim potencijalima brzine u težištu svakog panela hidrodinamičkog modela.



Slika 3.13 Hidrodinamički model oplakane površine broda

4. HIDROELASTIČNI MODEL

4.1. Metoda superponiranja prirodnih oblika vibriranja

Jednadžba gibanja hidroelastičnog modela rješava se primjenom metode superponiranja prirodnih oblika vibriranja. Ta se metoda vrlo često koristi u proračunima prisilnih vibracija sustava s više stupnjeva slobode, zbog svoje utemeljenosti na rezultatima proračuna slobodnih vibracija koji im obično prethode.

Dinamička jednadžba ravnoteže broskog trupa u metodi konačnih elemenata ima sljedeći oblik:

$$[K]\{D\} + [P]\{\dot{D}\} + [M]\{\ddot{D}\} = \{F(t)\}, \quad (4.1)$$

gdje je:

$[K]$	matrica krutosti
$[P]$	matrica (strukturnog i viskoznog) prigušenja
$[M]$	matrica masa
$\{D\}$	vektor pomaka čvorova
$\{F(t)\}$	vektor čvornih opterećenja.

Vektor pomaka čvorova može se pretpostaviti u obliku reda prirodnih oblika vibriranja [66]:

$$\{D\} = [\Xi]\{\xi\}, \quad (4.2)$$

gdje je:

$[\Xi]$	matrica prirodnih oblika vibriranja (smještenih po stupcima matrice)
$\{\xi\}$	vektor koeficijenata prirodnih oblika.

Uvrštavanjem izraza (4.2) u matričnu jednadžbu sustava (4.1), dobiva se:

$$[K][\Xi]\{\xi\} + [P][\Xi]\{\dot{\xi}\} + [M][\Xi]\{\ddot{\xi}\} = \{F(t)\}, \quad (4.3a)$$

što, nakon množenja transponiranom matricom prirodnih oblika vibriranja s lijeve strane, daje:

$$[\Xi]^T [K][\Xi]\{\xi\} + [\Xi]^T [P][\Xi]\{\dot{\xi}\} + [\Xi]^T [M][\Xi]\{\ddot{\xi}\} = [\Xi]^T \{F(t)\}. \quad (4.3b)$$

Gornja se jednadžba može napisati i u sažetom obliku:

$$[k]\{\dot{\xi}\} + [p]\{\dot{\xi}\} + [m]\{\ddot{\xi}\} = \{f(t)\}, \quad (4.3c)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} [k] &= [\Xi]^T [K] [\Xi] && \text{modalna matrica krutosti} \\ [p] &= [\Xi]^T [P] [\Xi] && \text{modalna matrica (strukturnog i viskoznog) prigušenja} \\ [m] &= [\Xi]^T [M] [\Xi] && \text{modalna matrica masa} \\ \{f(t)\} &= [\Xi]^T \{F(t)\} && \text{vektor modalnih čvornih sila} \end{aligned}$$

U slučaju periodičkog karaktera uzbudne sile, ukupno se rješenje dobiva superponiranjem pojedinačnih rješenja za svaki harmonik, tako da je dostatno poznavati odziv na opći član reda:

$$\{f(t)\} = \{\text{Re}[\tilde{f}e^{-i\omega t}]\} = \{f|\cos(\omega t + \varepsilon)\}, \quad (4.4)$$

gdje je f amplituda, ω frekvencija, a ε fazni pomak opterećenja.

Ako se i vektor koeficijenata prirodnih oblika vibriranja pretpostavi u istom, harmonijskom obliku:

$$\{\xi\} = \{\tilde{\xi}\}e^{-i\omega t}, \quad (4.5a)$$

kada vrijedi:

$$\{\dot{\xi}\} = -i\omega\{\tilde{\xi}\}e^{-i\omega t} \quad (4.5b)$$

$$\{\ddot{\xi}\} = -\omega^2\{\tilde{\xi}\}e^{-i\omega t}, \quad (4.5c)$$

iz jednadžbe (4.3c) slijedi:

$$[k]\{\tilde{\xi}\}e^{-i\omega t} - i\omega[p]\{\tilde{\xi}\}e^{-i\omega t} - \omega^2[m]\{\tilde{\xi}\}e^{-i\omega t} = \{\tilde{f}\}e^{-i\omega t}, \quad (4.6a)$$

odnosno:

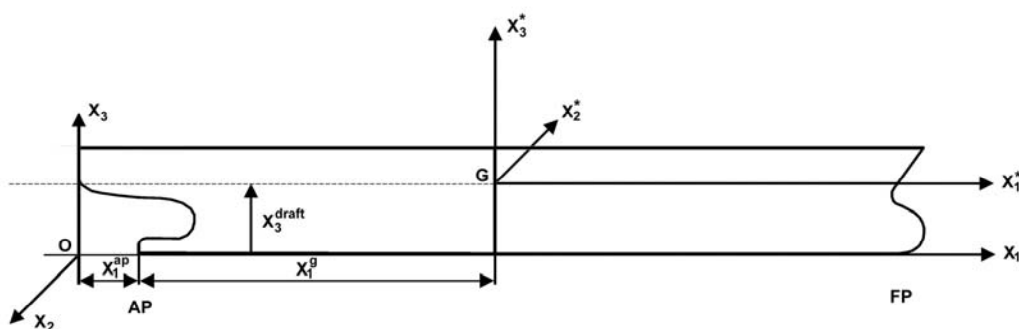
$$([k] - i\omega[p] - \omega^2[m])\{\tilde{\xi}\} = \{\tilde{f}\}. \quad (4.6b)$$

Na ovaj se način problem određivanja odziva na pojedini harmonik periodičke uzbude svodi na računanje nepoznatih (kompleksnih) amplituda prirodnih oblika vibriranja. Dobiveni sustav linearnih jednadžbi može se, za odabrane frekvencije, riješiti numeričkim postupcima – na primjer, metodom Gaussove eliminacije s parcijalnim pivotiranjem.

4.2. Sprezanje strukturnog i hidrodinamičkog modela

Sprezanje strukturnog i hidrodinamičkog modela provodi se prenošenjem odgovarajućih čvornih pomaka jednodimenzionalnog (grednog) modela konačnih elemenata u pomake u (željenim) točkama trodimenzionalnog (panel) modela rubnih elemenata.

Strukturni je model definiran u ljevokretnom koordinatnom sustavu $OX_1X_2X_3$ s ishodištem na presjeku krme i osnovke broda, a hidrodinamički u desnokretnom koordinatnom sustavu $G X_1^* X_2^* X_3^*$ kojem je ishodište smješteno u razini vodne linije na vertikali težišta broda, slika 4.1.



Slika 4.1 Koordinatni sustavi strukturnog i hidrodinamičkog modela

Matrica prirodnih oblika vibriranja iz jednadžbe (4.2) sastavljena je od vektora pojedinih prirodnih oblika koji obuhvaćaju pomake svih čvorova strukturnog modela:

$$[\Xi] = [\dots \{\Xi\}_i \dots] = \left[\dots \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \{\Xi\}_{ij} \\ \dots \end{matrix} \right\} \dots \right], \quad (4.7a)$$

gdje je (pod)vektor pomaka u j-tom čvoru kod i-tog prirodnog oblika:

$$\{\Xi\}_{ij} = \left\{ \begin{matrix} u \\ y^v \\ \varphi^v \\ y^h \\ \varphi^h \\ \psi \\ \vartheta \end{matrix} \right\}_{ij}, \quad (4.7b)$$

sastavljen od sljedećih pomaka čvorova grede:

u	uzdužni pomak
y^v	ukupni progib vertikalnog savijanja
φ^v	kut zakreta poprečnog presjeka uslijed vertikalnog savijanja
y^h	ukupni progib horizontalnog savijanja
φ^h	kut zakreta poprečnog presjeka uslijed horizontalnog savijanja
ψ	kut uvijanja
ϑ	deformacija uvijanja.

U prethodnom poglavlju vektor pomaka točke hidrodinamičkog modela definiran je izrazom (3.89):

$$\tilde{\vec{H}} = \sum_{i=1}^{6+N} \tilde{\xi}_i \vec{h}^i,$$

gdje je $\tilde{\xi}_i$ kompleksna amplituda, \vec{h}^i vektor pomaka točke uslijed i-tog (prirodnog) oblika vibriranja, a N broj prirodnih oblika vibriranja trupa na zraku.

Točka P (X_1^*, X_2^*, X_3^*) hidrodinamičkog modela u koordinatnom sustavu strukturnog modela ima sljedeće koordinate, slika 4.1:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1^* + X_1^{ap} + X_1^g \\ X_2 &= X_2^* \\ X_3 &= X_3^* + X_3^{draft} \end{aligned}, \quad (4.8)$$

gdje je X_1^{ap} udaljenost krme broda od stražnje okomice, X_1^g udaljenost težišta broda od stražnje okomice, a X_3^{draft} gaz broda za razmatrano stanje krcanja.

Sprega među modelima ostvaruje se *raspršivanjem* čvornih pomaka grednog modela na pomake točke na oplakanoj površini broda za pojedine oblike vibriranja, što se, simbolički, može napisati u obliku:

$$\vec{h}^i = F(\{\Xi\}_{ij}). \quad (4.9)$$

Pri tome se, kako bi se dobio odgovarajući (pod)vektor grednih pomaka u “čvoru” j , a na temelju x_1 koordinate točke (unutar strukturnog modela), provodi interpolacija funkcijama oblika između susjednih vrijednosti čvornih pomaka. U općem slučaju funkcija raspršivanja ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}\vec{h}^i = & \left[u_{ij} + \varphi_{ij}^v (X_3 - X_3^v) + \varphi_{ij}^h (X_2 - X_2^h) + \bar{u} \mathcal{G}_{ij} \right] \vec{j} + \\ & + \left[-y_{ij}^h - \psi_{ij} (X_3 - X_3^t) \right] \vec{j} + \left[-y_{ij}^v + \psi_{ij} (X_2 - X_2^t) \right] \vec{k},\end{aligned}\quad (4.10)$$

gdje je:

X_3^v	vertikalna koordinata neutralne linije vertikalnog savijanja
X_2^h	horizontalna koordinata neutralne linije horizontalnog savijanja
X_3^t	vertikalna koordinata neutralne linije uvijanja
X_2^t	horizontalna koordinata neutralne linije uvijanja
\bar{u}	vrijednost funkcije vitoperenja poprečnog presjeka u točki oplakane površine.

Odabirom odgovarajućih čvornih pomaka, iz posljednjeg se izraza mogu dobiti vektori pomaka točaka na brodu za pojedine komponente njihanja krutog tijela.

Zalijetanje

$$u = 1 \quad (4.11a)$$

$$\vec{h}^1 = \vec{i} \quad (4.12a)$$

Zanošenje

$$y^h = -1 \quad (4.11b)$$

$$\vec{h}^2 = \vec{j} \quad (4.12b)$$

Poniranje

$$y^v = -1 \quad (4.11c)$$

$$\vec{h}^3 = \vec{k} \quad (4.12c)$$

Ljuljanje

$$\begin{aligned}\psi &= 1 \\ y^h &= \psi (X_3^t - X_3^o) \\ y^v &= -\psi (X_2^t - X_2^o)\end{aligned}\quad (4.11d)$$

$$\vec{h}^4 = -(X_3 - X_3^o) \vec{j} + (X_2 - X_2^o) \vec{k} \quad (4.12d)$$

Posrtanje

$$\begin{aligned}\varphi^v &= 1 \\ u &= \varphi^v (X_3^v - X_3^o) \\ y^v &= \varphi^v (X_1 - X_1^o)\end{aligned}\tag{4.11e}$$

$$\vec{h}^5 = (X_3 - X_3^o)\vec{i} - (X_1 - X_1^o)\vec{k}\tag{4.12e}$$

Zaošijanje

$$\begin{aligned}\varphi^h &= -1 \\ u &= \varphi^h (X_2^h - X_2^o) \\ y^h &= \varphi^h (X_1 - X_1^o)\end{aligned}\tag{4.11f}$$

$$\vec{h}^6 = -(X_2 - X_2^o)\vec{i} + (X_1 - X_1^o)\vec{j}\tag{4.12f}$$

Dobiveni izrazi (4.12a – 4.12f) odgovaraju komponentama njihovanja krutog tijela na valovima definiranim jednažbama (3.91), pri čemu je:

$$\vec{R}^o = X_1^o\vec{i} + X_2^o\vec{j} + X_3^o\vec{k}.\tag{4.13}$$

vektor položaja referentne točke (za njihovanja krutog tijela) u mirovanju.

Iz jednažbe (4.10) mogu se dobiti i vektori pomaka točaka oplakane površine za elastične oblike pojedinih vrsta vibracija.

Vertikalne vibracije

$$\vec{h}^i = \varphi_{ij}^v (X_3 - X_3^v)\vec{i} - y_{ij}^v\vec{k}\tag{4.14a}$$

Horizontalne vibracije

$$\vec{h}^i = \varphi_{ij}^h (X_2 - X_2^h)\vec{i} - y_{ij}^h\vec{j}\tag{4.14b}$$

Torzijske vibracije

$$\vec{h}^i = \bar{u}\vartheta_{ij}\vec{i} - \psi_{ij}(X_3 - X_3^t)\vec{j} + \psi_{ij}(X_2 - X_2^t)\vec{k}\tag{4.14c}$$

Spregnute horizontalne i torzijske vibracije

$$\vec{h}^i = [\varphi_{ij}^h (X_2 - X_2^h) + \bar{u}\vartheta_{ij}]\vec{i} + [-y_{ij}^h - \psi_{ij}(X_3 - X_3^t)]\vec{j} + \psi_{ij}(X_2 - X_2^t)\vec{k}\tag{4.14d}$$

Izraz (4.10) može se prikazati i u sljedećem obliku:

$$\vec{h}^i = \delta x_1^i \vec{i} + \delta x_2^i \vec{j} + \delta x_3^i \vec{k}. \quad (4.15)$$

Položaj točke P na oplakanoj površini broda deformiranoj uslijed i-tog (prirodnog) oblika vibriranja:

$$\begin{aligned} x_1^* &= X_1^* + \delta x_1^i \\ x_2^* &= X_2^* + \delta x_2^i \\ x_3^* &= X_3^* + \delta x_3^i \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3. Jednadžba gibanja u frekvencijskom području

U drugom je poglavlju, sklapanjem pojedinih konačnih elemenata u globalni model, izvedena matrična jednadžba sustava (2.222):

$$[K^*]\{D\} = \{F\} + \{Q\}, \quad (4.17a)$$

koja se, ukoliko nema koncentriranog opterećenja $\{Q\}$, svodi na sljedeći oblik:

$$[K]\{D\} - \omega^2 [M]\{D\} = \{F\}, \quad (4.17b)$$

što, nakon uključivanja strukturnog i viskoznog prigušenja, konačno daje:

$$[K]\{D\} - i\omega [P]\{D\} - \omega^2 [M]\{D\} = \{F\}, \quad (4.17c)$$

Uvrštavanjem pretpostavljenog oblika vektora čvornih pomaka (4.2) i daljnjim sređivanjem analognim postupku u potpoglavlju 4.1, ponovno se dobiva izraz (4.6b):

$$([k] - i\omega [p] - \omega^2 [m])\{\tilde{\xi}\} = \{\tilde{f}\}.$$

Vektor modalnih čvornih sila na desnoj strani jednadžbe sastavljen je od radova čvornih sila na pomacima pojedinih prirodnih oblika vibriranja, odnosno od elemenata analognih modalnim silama hidrodinamičkog modela definiranih izrazom (3.93c). Uvrštavanjem komponenti ukupne modalne sile, izrazâ (3.132b), (3.137), (3.140c) i (3.141b), iz posljednje jednadžbe slijedi:

$$([k] - i\omega [p] - \omega^2 [m])\{\tilde{\xi}\} = -[C]\{\tilde{\xi}\} + \{\tilde{f}^{DI}\} + (\omega^2 [A] + i\omega [B])\{\tilde{\xi}\}, \quad (4.18a)$$

što, nakon sređivanja, daje konačan oblik jednadžbe gibanja u frekvencijskom području:

$$\{-\omega^2([m]+[A]) - i\omega([p]+[B]) + ([k]+[C])\}\{\tilde{\xi}\} = \{\tilde{f}^{DI}\}, \quad (4.18b)$$

gdje je:

$[m]$	modalna matrica masa
$[A]$	matrica hidrodinamičkih koeficijenata dodatne mase
$[p]$	modalna matrica (strukturnog i viskoznog) prigušenja
$[B]$	matrica hidrodinamičkih koeficijenata prigušenja
$[k]$	modalna matrica krutosti
$[C]$	matrica koeficijenata povratne sile
$\{\tilde{f}^{DI}\}$	vektor (kompleksnih) amplituda modalne uzbudne sile
$\{\tilde{\xi}\}$	vektor (kompleksnih) amplituda prirodnih oblika.

Nakon rješavanja sustava lineranih jednadžbi (4.18b) po nepoznatim amplitudama prirodnih oblika, pomaci bilo koje točke na površini mogu se odrediti pomoću izraza (3.89).

Osim toga, moguće je odrediti i “moke” prirodne oblike vibriranja rješavanjem problema vlastitih vrijednosti izvedenog, uz zanemarivanje prigušenja, iz sustava (4.18b):

$$\{-\omega^2([m]+[A]) + ([k]+[C])\}\{\tilde{\xi}\} = \{0\}. \quad (4.18c)$$

Budući da hidrodinamički koeficijenti dodatne mase ovise o frekvenciji vala, rješavanje ovog problema zahtijeva primjenu iterativnog postupka.

4.4. Jednadžba gibanja u vremenskom području

Budući da je provođenje nelinearnih analiza u frekvencijskom području moguće jedino uz korištenje (puno) složenijih teorija višeg reda, obično se simuliranje prolaznog odziva (podrhtavanja trupa nakon udaranja pramca o valove, na primjer) provodi prelaskom u vremensko područje. Ono je znatno fleksibilnije prema uključivanju nelinearnosti – dostatno je uvesti nelinearne komponente uzbudne sile.

Uz pretpostavku harmonijskog gibanja, prema postupku koji je predložio Cummins 1962. godine [34, 52], jednadžba gibanja u vremenskom području ima sljedeći oblik:

$$([m]+[A^\infty])\{\ddot{\xi}(t)\} + ([k]+[C])\{\xi(t)\} + \int_0^t [K(t-\tau)]\{\dot{\xi}(t)\}d\tau = \{f^{DI}(t)\}. \quad (4.19)$$

gdje su:

- $[A^\infty]$ matrica dodatne mase okolne vode kod beskonačne frekvencije
 $[K]$ matrica impulsne funkcije odziva.

Posljednji član na lijevoj strani u gornjem izrazu konvolucijski je integral koji obuhvaća utjecaj radijacijskih valova nastalih osciliranjem (deformabilnog) tijela na polje tlaka.

Najzahtjevniji dio proračuna u vremenskom području određivanje je matrice memorijske funkcije prigušenja $[K]$. Budući da su proračuni u frekvencijskom području manje zahtjevniji, obično se iskorištava činjenica da su hidrodinamički koeficijenti iz jednadžbi (4.18b) i (4.19) međusobno povezani preko Fourierovih transformacija – nakon njihovog određivanja u frekvencijskom području, memorijska se funkcija, na primjer, može dobiti numeričkim integriranjem na osnovi frekvencijske razdiobe koeficijenata prigušenja:

$$K_{ij}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B_{ij}(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (4.20a)$$

ili koeficijenata dodatne mase:

$$K_{ij}(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty [A_{ij}(\omega) - A_{ij}^\infty] \sin \omega t d\omega. \quad (4.20b)$$

Slično tome, uzbudna sila dobiva se kao:

$$f^{DI}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \tilde{f}^{DI}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right\}, \quad (4.21a)$$

tako da za stanje mora predstavljeno odgovarajućim spektrom energije morskih valova vrijedi:

$$f^{DI}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N A_i \tilde{f}^{DI}(\omega) e^{-i(\omega_i t + \varepsilon_i)} \right\}, \quad (4.21b)$$

gdje su A_i , ω_i i ε_i amplituda, frekvencija i (slučajni) fazni kut pojedinih komponenti valnog spektra.

Jednadžba gibanja (odnosno, problem početnih vrijednosti diferencijalne jednadžbe drugog reda) rješava se, za konstantan vremenski korak, Runge-Kutta-Nyström metodom četvrtog reda [45], pri čemu se, u svakom pojedinom trenutku, najprije treba odrediti vrijednost konvolucijskog integrala. Za vremensku integraciju na raspolaganju su i druge numeričke metode razvijene u dinamici konstrukcija: Houboltova, Newmarkova i Wilsonova metoda [67] te metoda harmonijskog ubrzanja razvijena na FSB-u [68 – 71].

Osim toga, u vremenskom je području moguće simulirati i test slobodnog prigušenog vibriranja (engl. *decay test*), rješavanjem sljedećeg problema početnih vrijednosti:

$$([m] + [A^\infty])\{\ddot{\xi}(t)\} + ([k] + [C])\{\dot{\xi}(t)\} + \int_0^t [K(t-\tau)]\{\dot{\xi}(\tau)\}d\tau = \{0\}. \quad (4.22)$$

U početnom se trenutku definira deformacija i brzina deformacije (koja može biti jednaka nuli) konstrukcije, odnosno oplakane površine, a zatim se te funkcije razvijaju u redove suhih prirodnih oblika vibriranja:

$$H(x_1, x_2, x_3; t) = \sum_{i=1}^{6+N} \xi_i(t) h_i \quad (4.23a)$$

$$\dot{H}(x_1, x_2, x_3; t) = \sum_{i=1}^{6+N} \dot{\xi}_i(t) h_i, \quad (4.23b)$$

koji u početnom trenutku glase:

$$H^0 = \sum_{i=1}^{6+N} \xi_i^0 h_i \quad (4.24a)$$

$$\dot{H}^0 = \sum_{i=1}^{6+N} \dot{\xi}_i^0 h_i. \quad (4.24b)$$

Zbog ortogonalnosti prirodnih oblika vibriranja [66] proizlazi:

$$\iint_S H^0 h_i dS = \xi_i^0 \iint_S h_i^2 dS, \quad (4.25)$$

tako da slijedi:

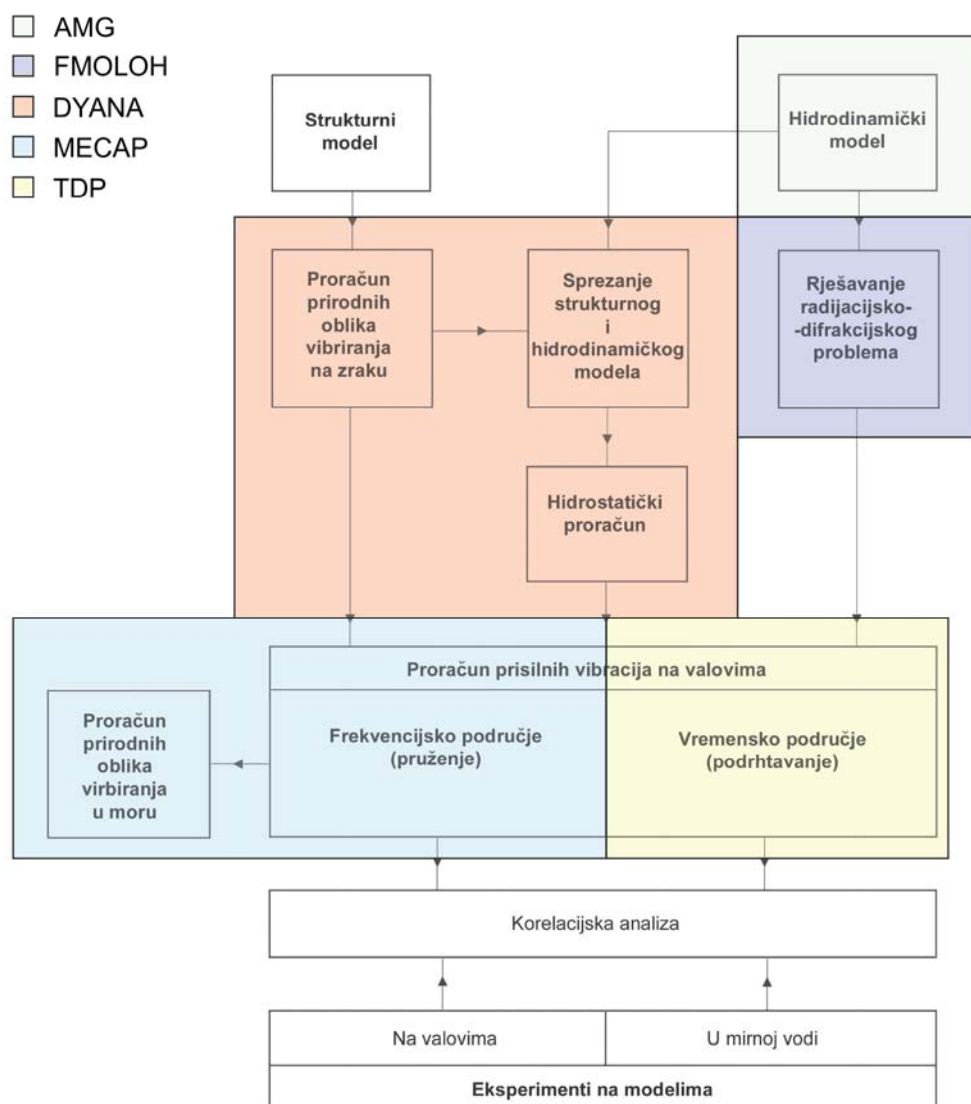
$$\xi_i^0 = \frac{\iint_S H^0 h_i dS}{\iint_S h_i^2 dS}, \quad (4.26a)$$

odnosno:

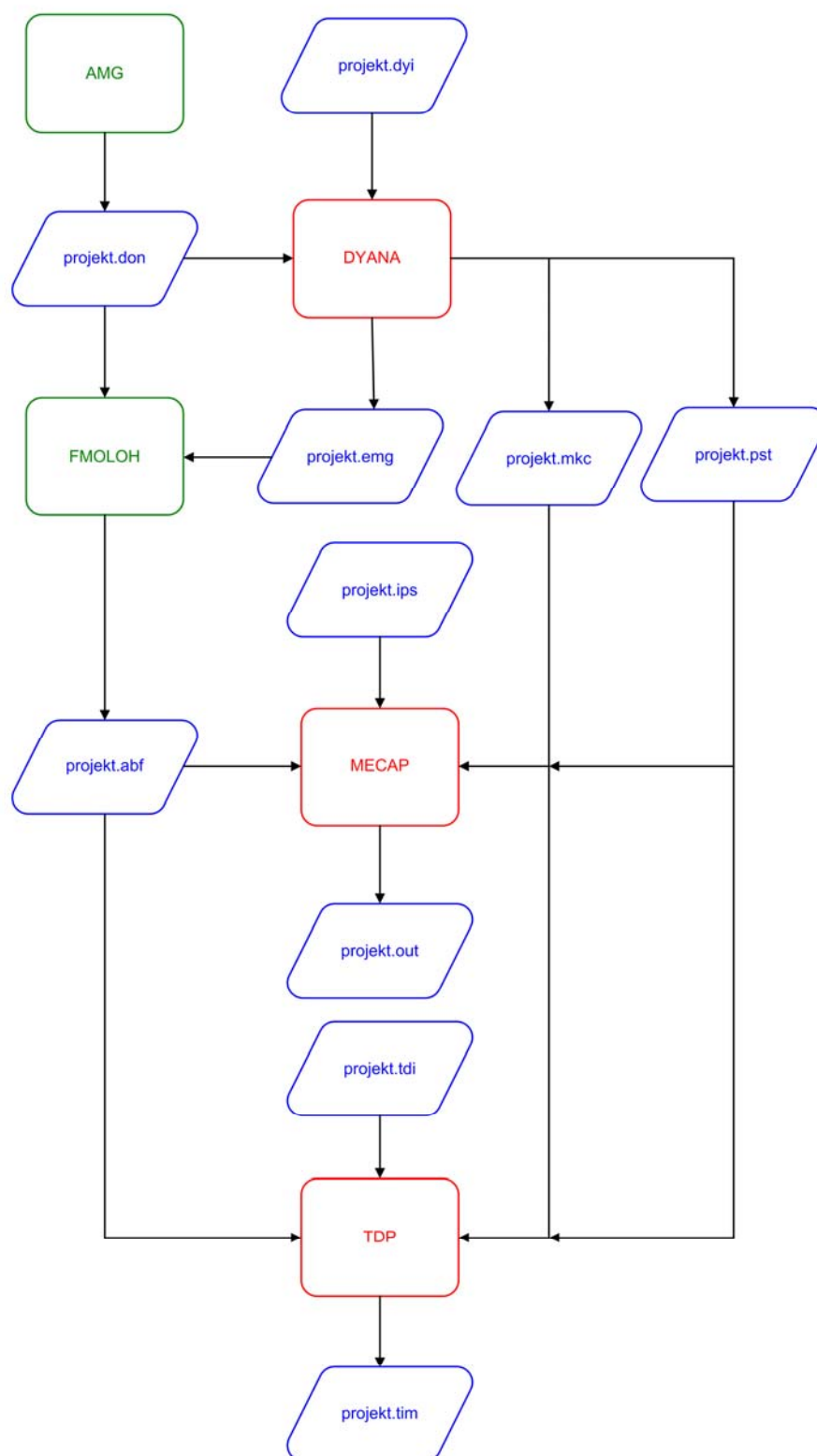
$$\dot{\xi}_i^0 = \frac{\iint_S \dot{H}^0 h_i dS}{\iint_S h_i^2 dS}. \quad (4.26b)$$

5. METODOLOGIJA HIDROELASTIČNE ANALIZE

Metodologija hidroelastične analize shematski je prikazana na slici 5.1. Prema toj shemi, u Istraživačkom odjelu Bureau Veritasa, razvija se programski paket za proračun hidroelastičnog odziva broda, slika 5.2, u koji će se uključiti i programi razvijeni u okviru izrade ovog doktorskog rada.



Slika 5.1 Metodologija hidroelastične analize



Slika 5.2 Programski paket Bureau Veritasa za određivanje hidroelastičnog odziva

Unutar navedene procedure, već su ravijeni neki moduli: AMG (*Automatic Mesh Generator*) – program za automatsko generiranje hidrodinamičkog modela (oplakane površine) te FMOLOH (*Flexible Modelling of Loads in Hydrodynamics*), inačica HYDROSTAR-a za rješavanje radijacijsko-difrakcijskog problema njihanja elastičnog tijela na harmonijskim progresivnim valovima, primjenom klasične metode integralnih jednadžbi. Osim toga, postojala je i nedovršena verzija koda za rješavanje problema slobodnog vibriranja jednodimenzionalnog modela trupa na zraku, koja nije uključivala spregnuto horizontalno savijanje i uvijanje.

U sklopu izrade ove disertacije, a na osnovi izložene teorije, napisana su tri računalna koda (u programskom jeziku FORTRAN), kompatibilna s ostalim dijelovima budućeg programskog paketa Bureau Veritasa za proračun hidroelastičnog odziva. Pojednostavljeni dijagrami tih programa dani su u prilogu 2. Komunikacija između pojedinih modula odvija se preko *interface* datoteka, slika 5.2.

Prvi od njih, DYANA (*DYnamic ANAlysis*), koristi se za određivanje *suhih* prirodnih oblika vibriranja, modalne mase, modalne krutosti i koeficijenata povratne sile. Njegova primjena omogućuje proračun prisilnih vibracija broda na harmonijskim valovima (metodom superponiranja prirodnih oblika) na temelju bilo kakve kombinacije njihanja krutog tijela i elastičnih oblika vertikalnih, horizontalnih, torzijskih i/ili spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija.

Jednadžba se gibanja, nakon što se pomoću programa DYANA i FMOLOH odrede sve matrice koje ulaze u nju, može riješiti u frekvencijskom i vremenskom području. Drugi kod, MECAP (*Motion Equation Calculation And Postprocessing*), koristi se za određivanje (frekvencijskih) prenosnih funkcija odziva broda, kao i za proračun *mokrih* prirodnih oblika vibriranja.

Posljednji kod, TDP (*Time Domain Postprocessing*), daje odziv broda u vremenskom području.

Potrebno je napomenuti kako se u Bureau Veritasu namjerava razviti postupak sprežanja trodimenzionalnog strukturnog modela s ovdje opisanim hidrodinamičkim modelom, nakon što su u okviru ovog doktorskog rada postavljeni teorijski temelji, detaljno analizirane fizikalne postavke i dinamičko ponašanje konstrukcija pomoću grednog strukturnog modela. Sprežanje 3D strukturnog i hidrodinamičkog modela služiti će, u prvom redu, u komercijalne svrhe za hidroelastičnu analizu velikih kontejnerskih brodova i doradu pravila za njihovu konstrukciju i gradnju.

6. NUMERIČKI PRIMJERI

6.1. Provjera strukturnog modela na primjeru prizmatičnog nosača s karakteristikama glavnog rebra kontejnerskog broda

Prije upotrebe u analizama stvarnih brodskih konstrukcija, potrebno je provjeriti pouzdanost razvijenog računalnog koda, DYANA, za proračun suhih prirodnih oblika jednodimenzionalnih strukturnih modela.

Adekvatan pojednostavljeni primjer predstavlja prizmatični nosač s karakteristikama poprečnog presjeka jednakim onima glavnog rebra kontejnerskog broda nosivosti 8200 TEU, slika 6.1. Duljina nosača je $L=2l=300$ m, dok su potrebne geometrijske značajke presjeka određene programom STIFF [72], na osnovi teorije uvijanja tankostjenih nosača [73-76]:

Površina poprečnog presjeka	$A = 6.394 \text{ m}^2$
Horizontalna smična površina	$F_y = 1.015 \text{ m}^2$
Vertikalna smična površina	$F_z = 1.314 \text{ m}^2$
Vertikalni položaj neutralne linije	$z_{NL} = 11.66 \text{ m}$
Vertikalni položaj centra torzije	$z_D = -13.50 \text{ m}$
Horizontalni moment tromosti	$I_z = 1899 \text{ m}^4$
Vertikalni moment tromosti	$I_y = 676 \text{ m}^4$
Faktor krutosti na uvijanje	$I_t = 14.45 \text{ m}^4$
Faktor krutosti na vitoperenje	$I_w = 171400 \text{ m}^6$

Uz Youngov modul elastičnosti:

$$E = 2.06 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

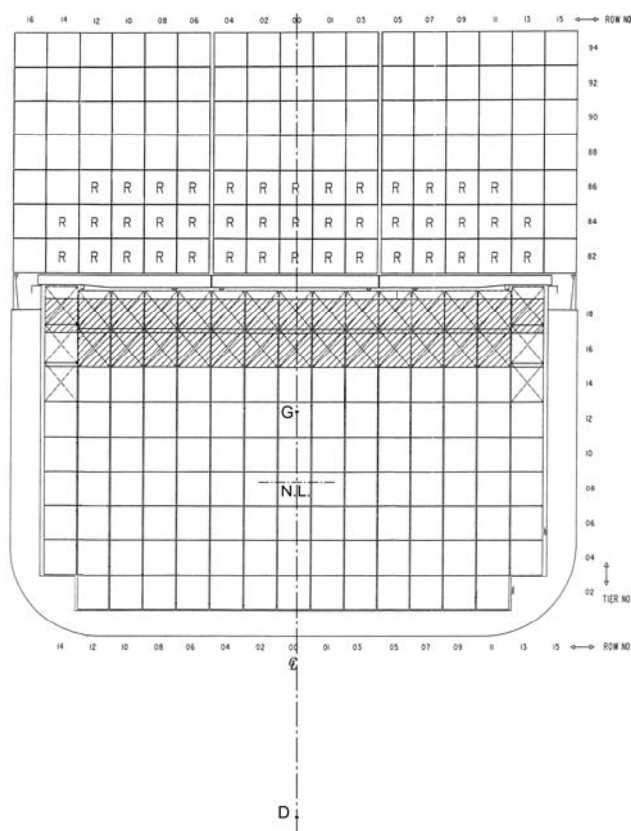
i modul smika:

$$G = 0.7923 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2,$$

za krutosti se dobivaju sljedeće veličine:

Krutost na smicanje:	$GF_y = 0.804 \cdot 10^8 \text{ kN}$
Krutost na savijanje:	$EI_z = 3.912 \cdot 10^{11} \text{ kNm}^2$
Krutost na uvijanje:	$GI_t = 1.145 \cdot 10^9 \text{ kNm}^2$
Krutost na vitoperenje:	$EI_w = 3.531 \cdot 10^{13} \text{ kNm}^4$

Težište je, zbog razmještaja kontejnera, slika 6.2, smješteno prilično visoko, tako da velika udaljenost između njega i centra torzije uzrokuje izuzetno jako sprezanje između horizontalnih i torzijskih vibracija.



Slika 6.2 Razmještaj kontejnera na paralelnom srednjaku broda nosivosti 8200 TEU

Rezultati koje daje numerički kod uspoređuju se s analitičkim rješenjem diferencijalnih jednačbi spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija, dobivenim izravnim integriranjem i energetsom metodom, zasnovanom na varijacijskom principu [77, 78]. Izvod prve od tih metoda donosi prilog C.

Model konačnih elemenata sastavljen je od 50 elemenata otvorenog poprečnog presjeka duljine 5.976 m i 2 krajnja elementa zatvorenog poprečnog presjeka duljine 0.6 m, čija se uloga sastoji u simuliranju spriječenog vitoperenja.

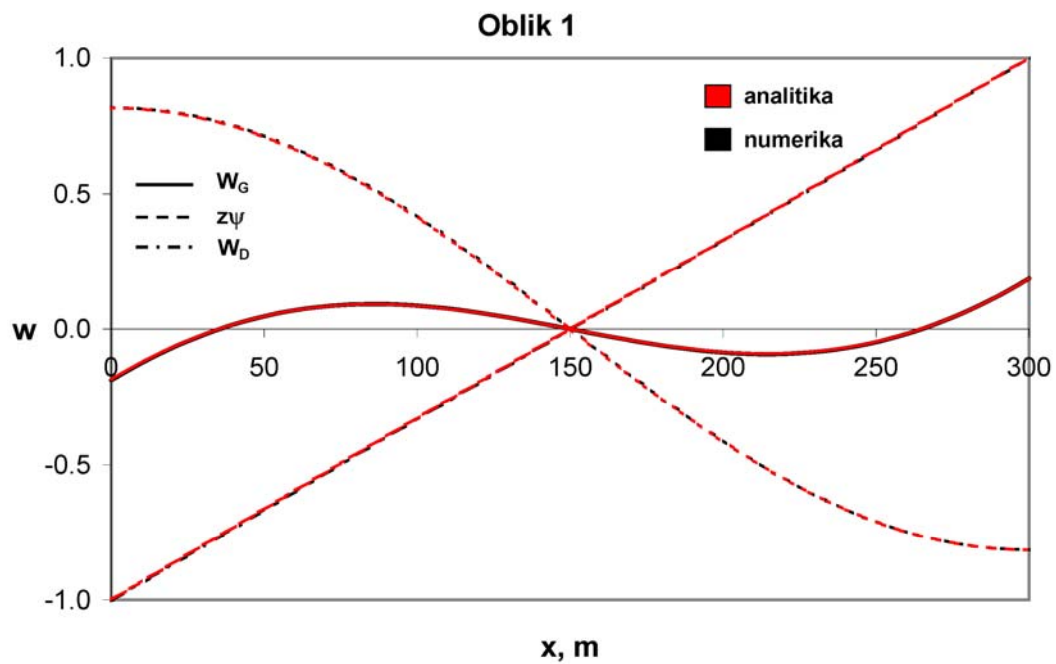
Prirodne frekvencije suhih spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija prizmatičnog nosača, dobivene analitičkim i numeričkim metodama, donosi tablica 6.1, iz koje se vidi dobro slaganje rezultata.

Tablica 6.1 Prirodne frekvencije spregnutih vibracija ω , rad/s

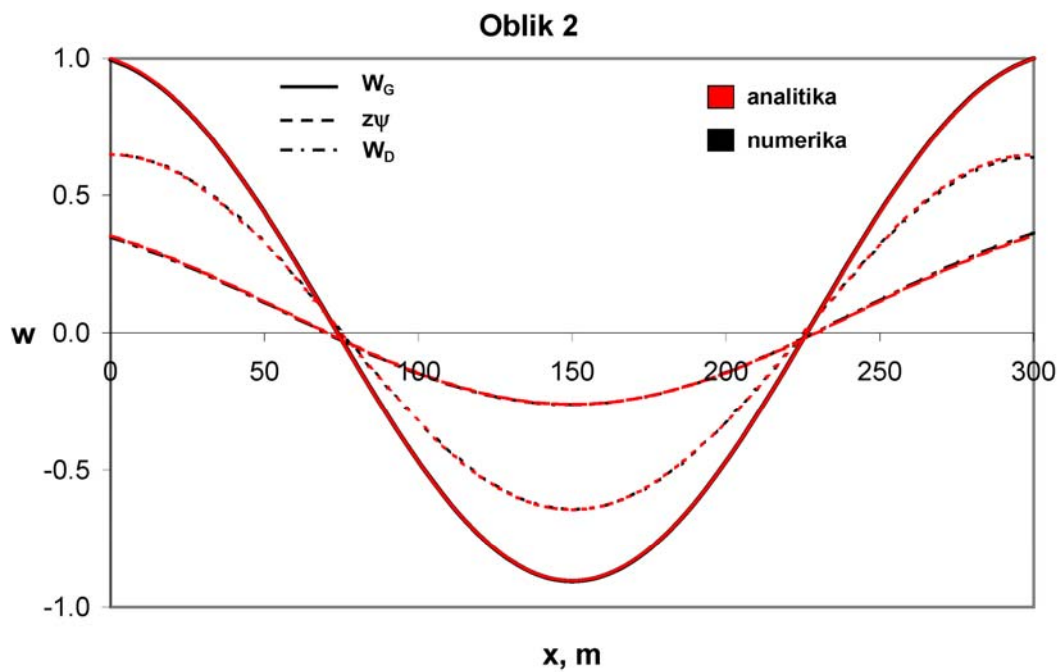
$n = 1, 3 \dots$ antisimetrični oblici

$n = 2, 4 \dots$ simetrični oblici

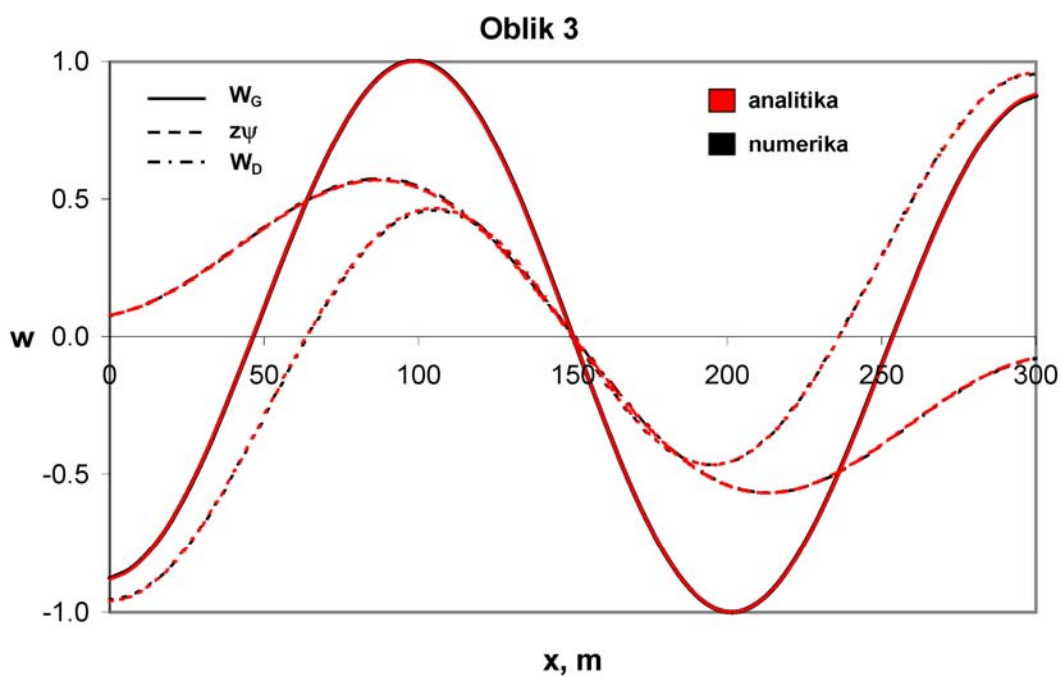
Oblik	Izravno integriranje Energetska metoda	FEM
1	1.717	1.722
2	2.827	2.836
3	6.088	6.108
4	9.457	9.474
5	13.937	13.985
6	11.943	11.972
7	22.126	20.196
8	18.434	18.525
9	23.710	23.839
10	27.153	27.375



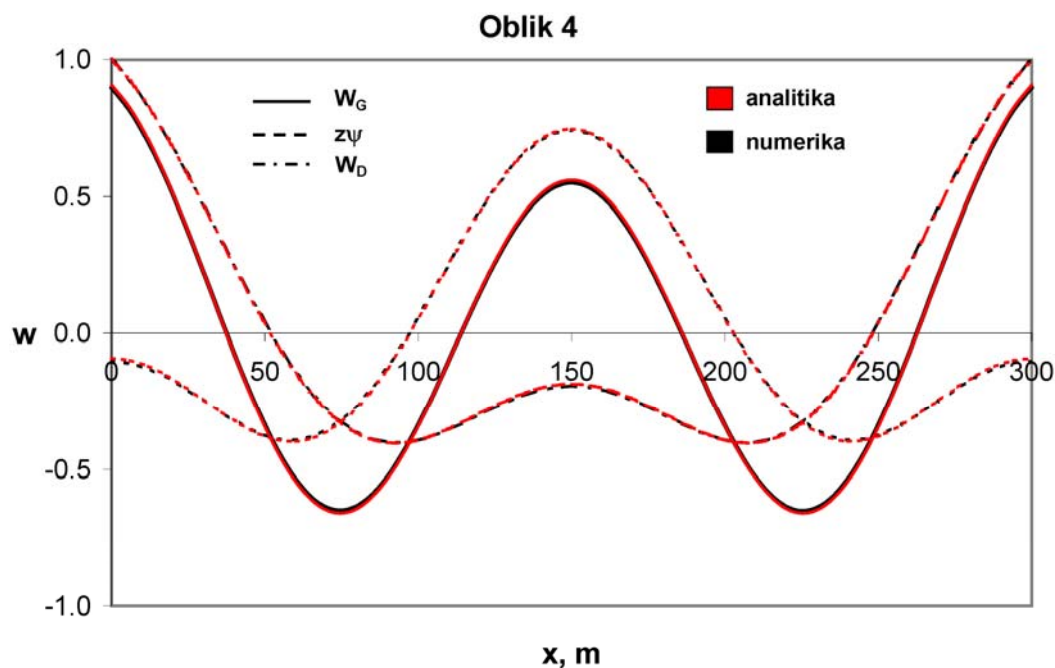
Slika 6.3 Analitičko i numeričko rješenje za prvi prirodni oblik



Slika 6.4 Analitičko i numeričko rješenje za drugi prirodni oblik



Slika 6.5 Analitičko i numeričko rješenje za treći prirodni oblik



Slika 6.6 Analitičko i numeričko rješenje za četvrti prirodni oblik

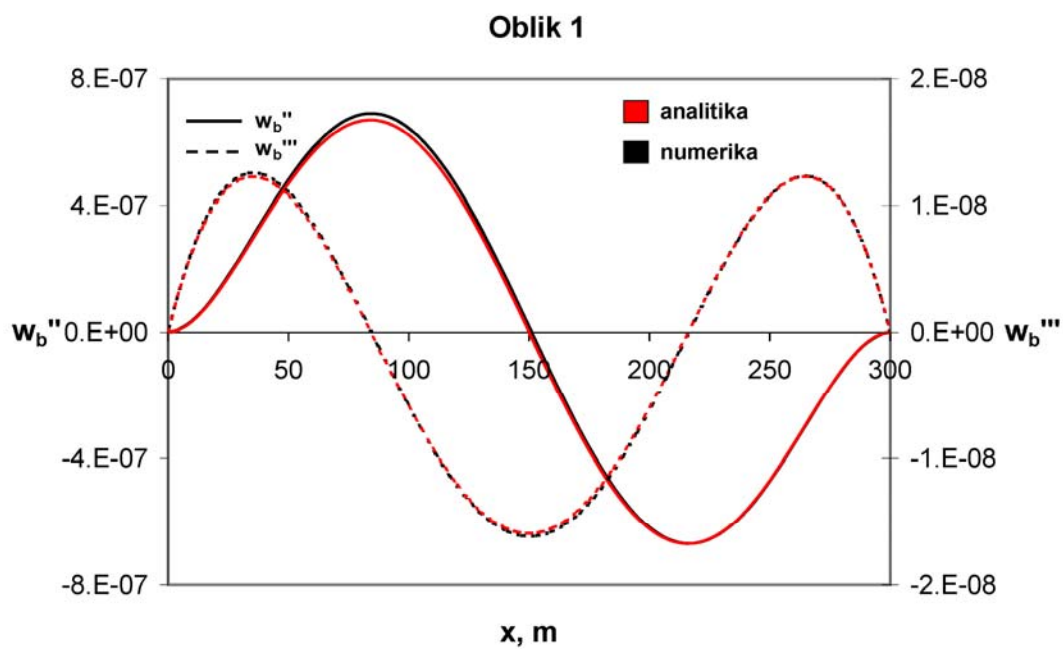
Na slikama 6.3 – 6.6 prikazana su prva četiri suha prirodna oblika vibriranja. Za svaki su oblik dane tri krivulje – progib nosača na razini centra torzije w_D , progib u težištu uslijed uvijanja $z\psi$ i ukupni progib na toj razini $w_G = w_D + z\psi$.

Krivulje izračunate analitičkim putem crvene su boje, dok su one proizašle iz numeričkog proračuna crne boje. Vidljivo je da su razlike među dobivenim prirodnim oblicima zanemarive.

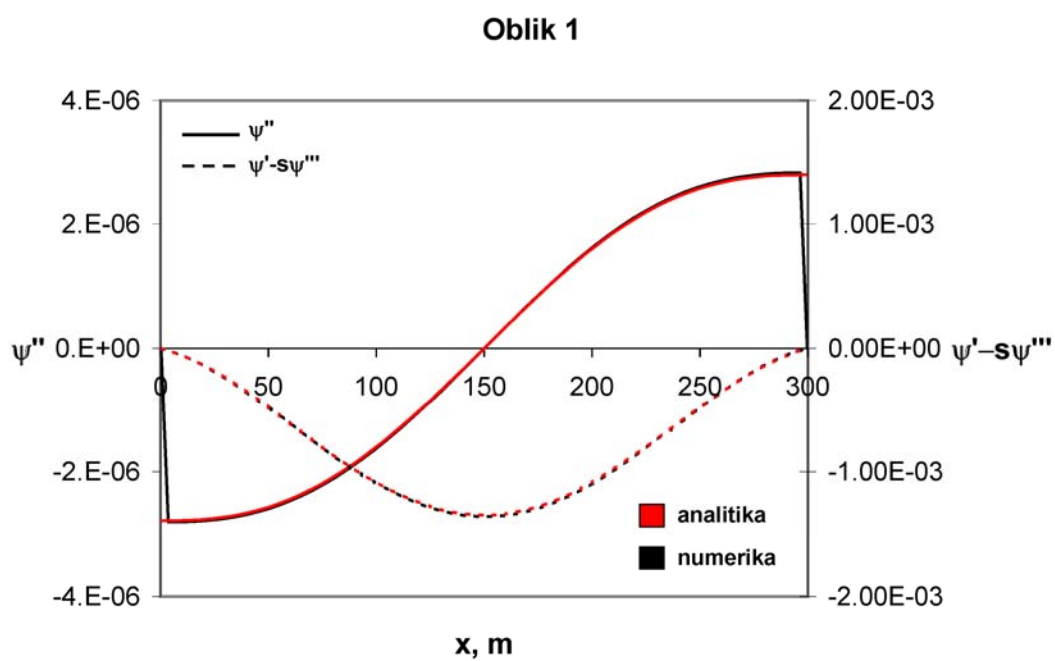
Sprezanje horizontalnih i torzijskih vibracija uvijek se javlja između simetričnih, odnosno antisimetričnih savojnih i torzijskih oblika.

Presječne sile (momenti savijanja M , smične sile Q , momenti uvijanja M_t , bimomenti vitoperenja T) ovise o odgovarajućoj krutosti EI_z , GF_y , GI_t i EI_w te deformacijama w'' , w''' , $\psi' - s\psi'''$ i ψ'' , gdje je $s = \frac{EI_w}{GI_t}$. Usporedbu dijagrama tih deformacija (koje možemo

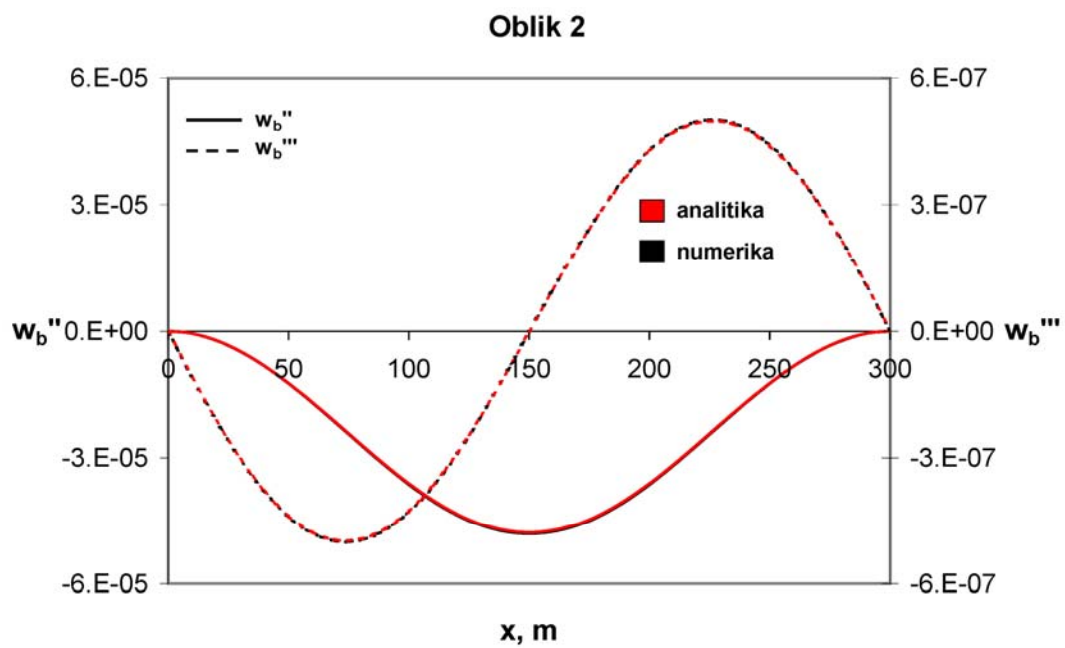
smatrati relativnim presječnim silama) za prva četiri suha oblika donose slike 6.7 – 6.14.



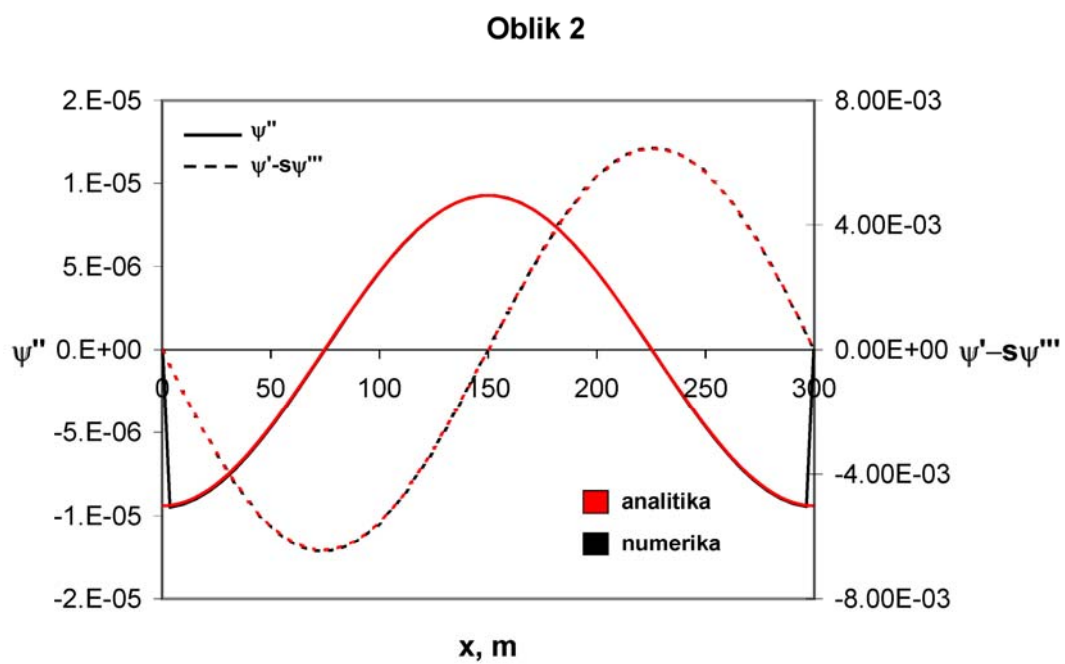
Slika 6.7 Presječne sile savijanja za prvi prirodni oblik



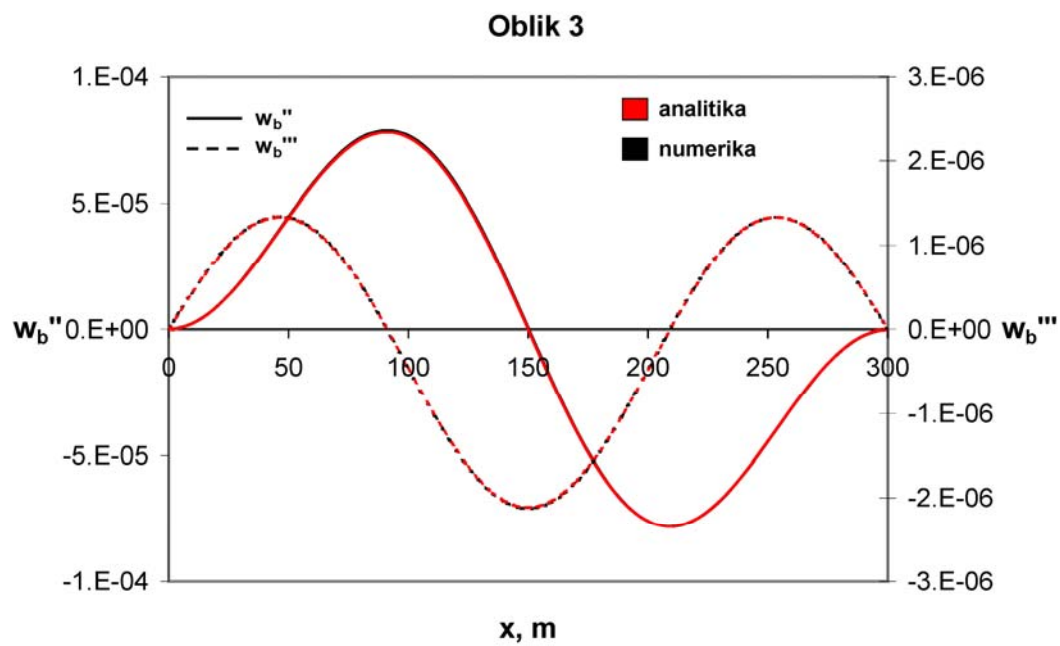
Slika 6.8 Presječne sile uvijanja za prvi prirodni oblik



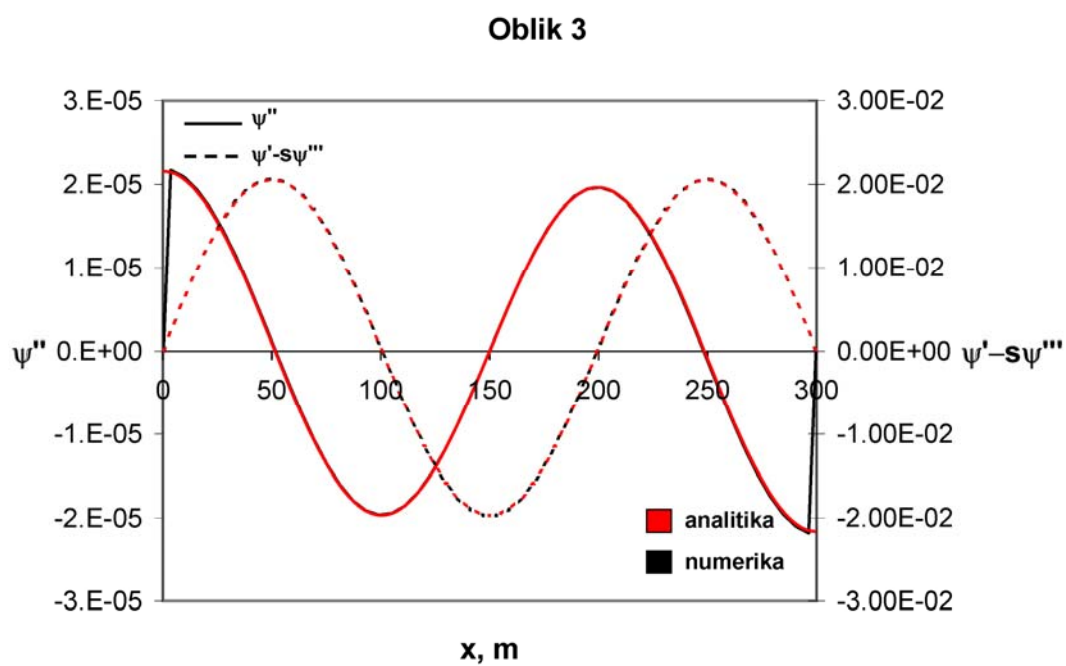
Slika 6.9 Presječne sile savijanja za drugi prirodni oblik



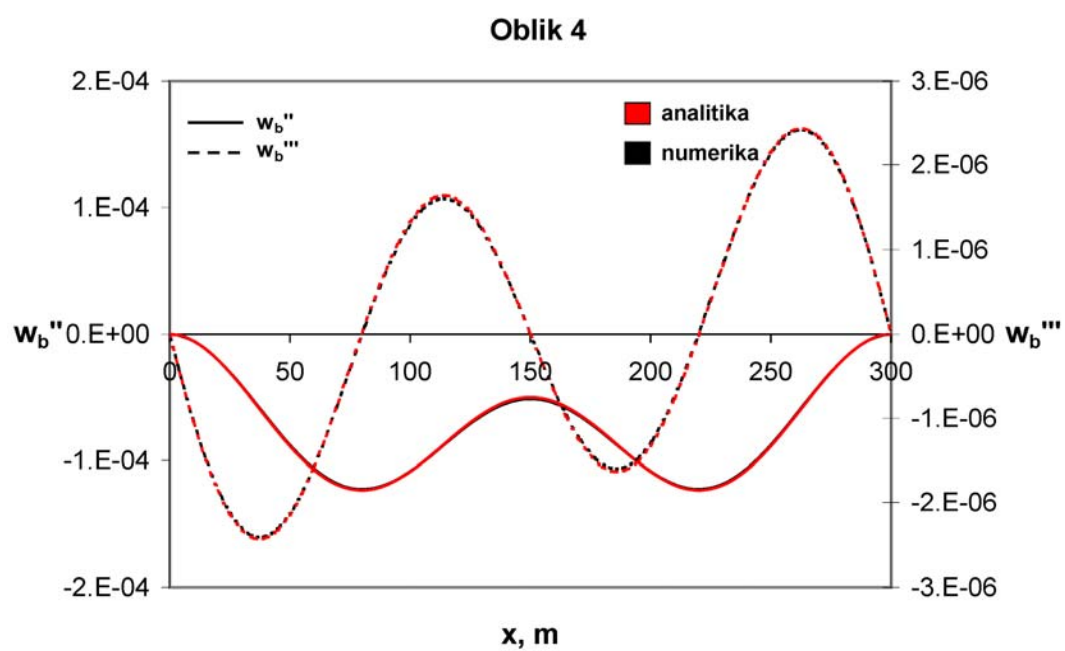
Slika 6.10 Presječne sile uvijanja za drugi prirodni oblik



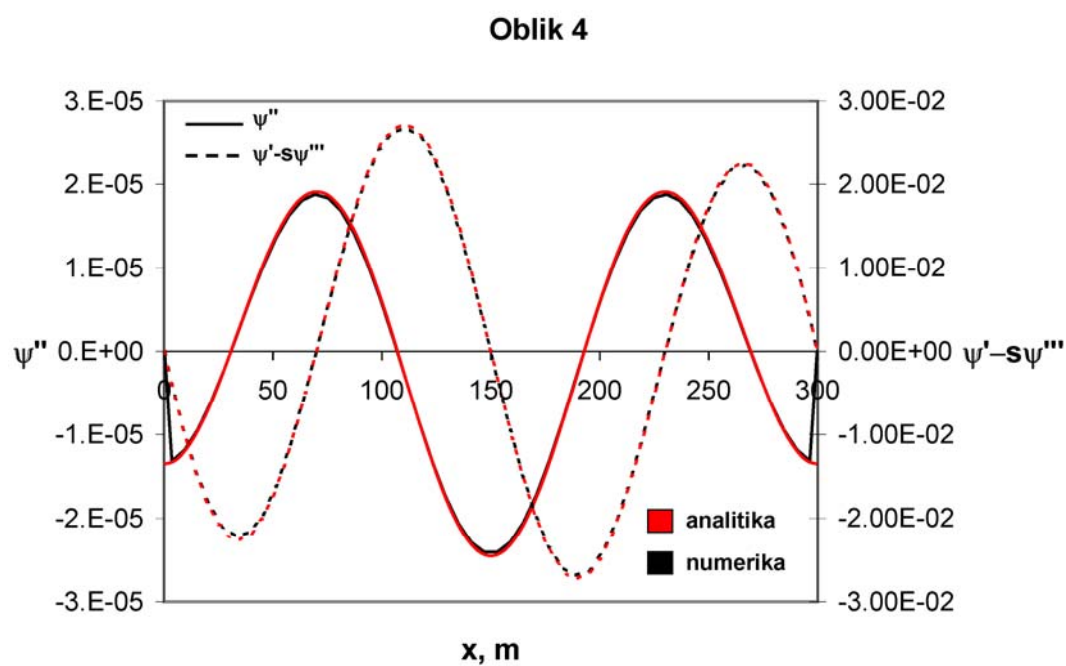
Slika 6.11 Presječne sile savijanja za treći prirodni oblik



Slika 6.12 Presječne sile uvijanja za treći prirodni oblik



Slika 6.13 Presječne sile savijanja za četvrti prirodni oblik



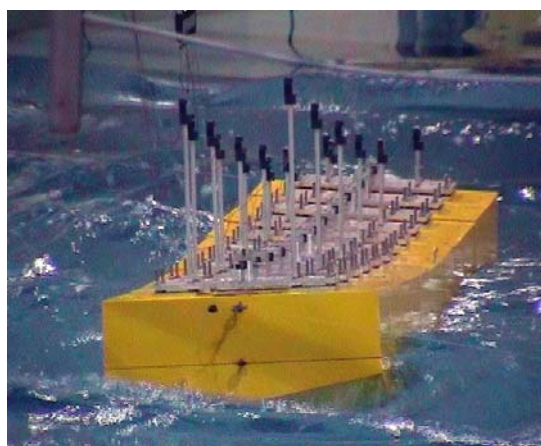
Slika 6.14 Presječne sile uvijanja za četvrti prirodni oblik

Rubni uvjeti na krajevima modela, izraz (2.219), po kojima moment savijanja, smična sila i moment uvijanja moraju biti jednaki nuli, zadovoljeni su. Relativni je bimoment, ψ'' , zbog spriječenog vitoperenja, $\psi' = 0$, različit od nule. Problem koncentracije naprezanja uslijed spriječenog vitoperenja razmatran je u [79].

6.2. Odziv elastične barže na valovima

Eksperimentalna ispitivanja

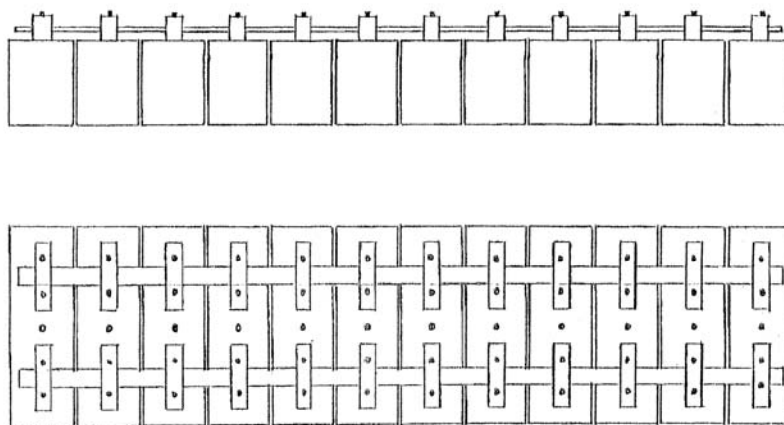
U bazenu *BGO-First*, smještenom u Seyne-sur-mer, pokraj Toulona, proveden je [80] niz namjenskih eksperimenata segmentirane elastične barže, slika 6.15, s ciljem osiguravanja podataka za provjeru numeričkih modela.



Slika 6.15 Segmentirana elastična barža na valovima

Barža je sastavljena od 12 pontona, slika 6.16, od kojih 11 identičnih ima sljedeće značajke:

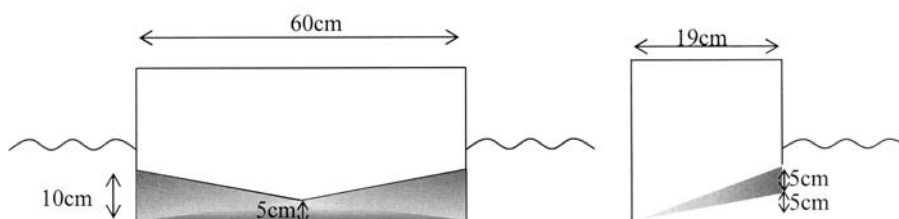
Duljina	$L = 190 \text{ mm}$
Širina	$B = 600 \text{ mm}$
Visina	$H = 250 \text{ mm}$
Gaz	$H = 120 \text{ mm}$
Masa	$m = 13.7 \text{ kg}$
Vertikalni položaj težišta	$z_G = 163 \text{ mm}$
Polumjer tromosti ljuľljanja	$i_{xx} = 225 \text{ mm}$



Slika 6.16 Segmentirana elastična barža [81]

Pramčani ponton nije, poput ostalih, potpuno prizmatičan, slika 6.17, a od ostalih se razlikuje i po nekim karakteristikama:

Masa	$m = 10.0 \text{ kg}$
Vertikalni položaj težišta	$z_G = 87 \text{ mm}$
Polumjer tromosti ljujanja	$i_{xx} = 213 \text{ mm}$



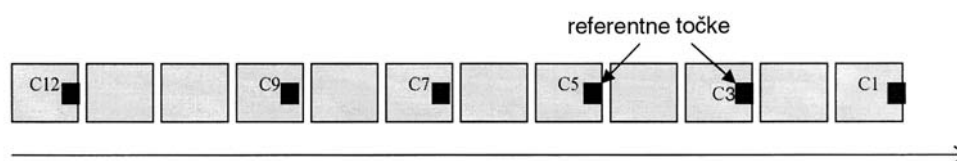
Slika 6.17 Geometrija pramčanog pontona [80]

Razmak između pojedinih pontona je 15 mm, slika 6.16, tako da je ukupna dužina barže 2.445 m, a međusobno su povezani čeličnom šipkom kvadratičnog poprečnog presjeka, duljine stranice 1 cm. Šipka je smještena 307 mm iznad osnovke, a njena je krutost provjerena statičkim testovima:

Krutost na savijanje:	$EI_z = EI_y = 175 \text{ Nm}^2$
Krutost na uvijanje:	$GI_t = 135 \text{ Nm}^2$

Centar torzije ne nalazi se ispod težišta masa, kako je to uobičajeno kod dijelova kontejnerskih brodova otvorenog poprečnog presjeka, već iznad njega. Međutim, zbog nezanemarive ($z = -0.144$ m) udaljenosti između tih dviju točaka, svejedno dolazi do jakog sprezanja horizontalnih i torzijskih vibracija.

Gibanja barže mjere se [80] optičkim sustavom RODYM DMM 6D (KRYPTON), izvrsne točnosti (bolje od 0.3 mm). Sustav čine tri video-kamere koje prate šest grupa od po tri infracrvene LED diode postavljene na pontonima označenima s C1, C3, C5, C7, C9 i C12 na slici 6.18. Referentna točka za gibanje svakog mjernog mjesta smještena je u presjeku središnjice, razine palube i prednjeg kraja odgovarajućeg pontona.



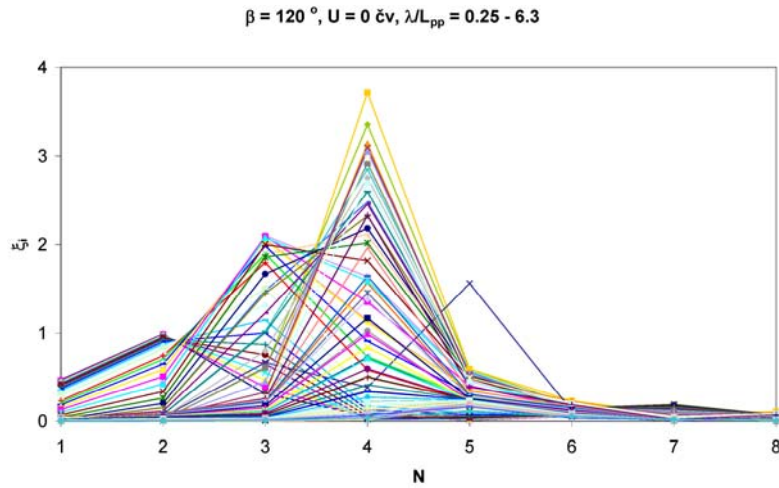
Slika 6.18 Referentne točke [74]

Uz pokuse prigušenih slobodnih vibracija barže na mirnom moru, provedena su i ispitivanja njezina odziva na pravilnim i nepravilnim valovima, za pet različitih smjerova u odnosu na valove – 180° (valovi u pramac broda), 150° , 120° , 105° i 90° .

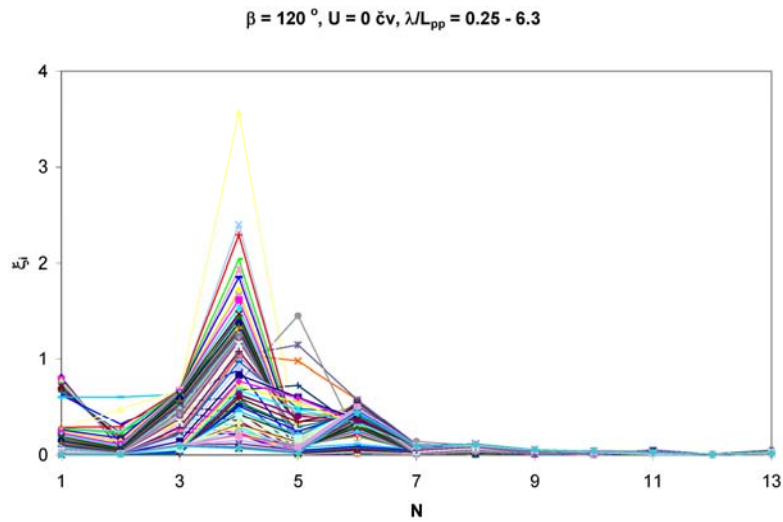
Numerički proračun

Proračun odziva elastične barže na valovima proveden je uzimajući u obzir šest komponenti njihanja krutog tijela, prvih pet suhih prirodnih oblika vertikalnih vibracija i prvih deset suhih prirodnih oblika spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija dobivenih na strukturnom modelu sastavljenom od 50 konačnih elemenata. Odabrani broj (elastičnih) oblika dostatan je kako bi se dovoljno precizno opisalo dinamičko ponašanje barže na valovima, slike 6.19 i 6.20.

Na slici 6.19 prikazane su amplitude zastajkivanja ($N=1$), poniranja ($N=2$), posrtanja ($N=3$) i prvih pet suhih prirodnih oblika vertikalnih vibracija ($N=4-8$), a na slici 6.20 one zanošenja ($N=1$), ljuljanja ($N=2$), zaošijanja ($N=3$) i prvih deset suhih prirodnih oblika spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija ($N=4-13$). Sve se amplitude odnose na normirane modove svedene na raspon vrijednosti linijskog pomaka između -1 i 1.



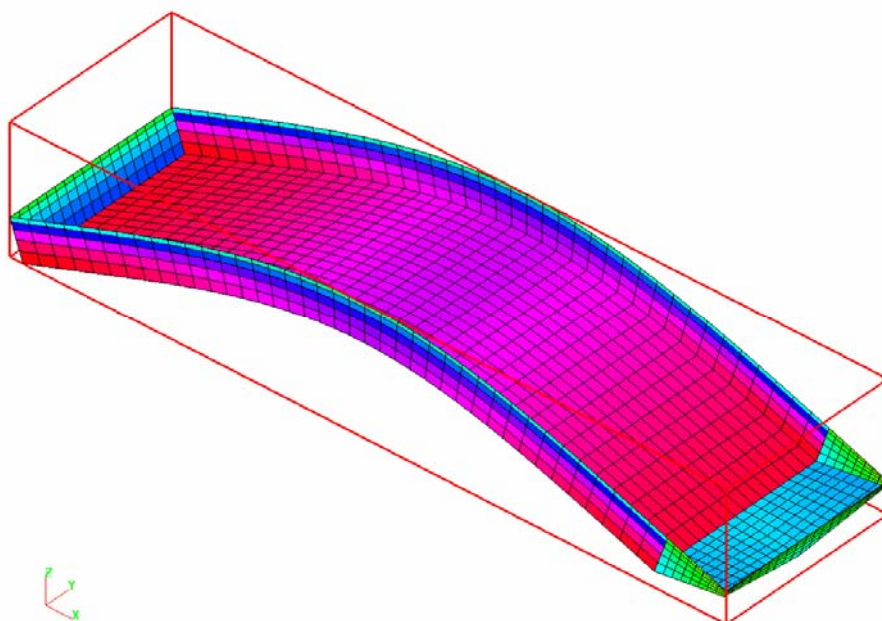
Slika 6.19 Apsolutne vrijednosti amplituda normiranih modova vertikalnog odziva



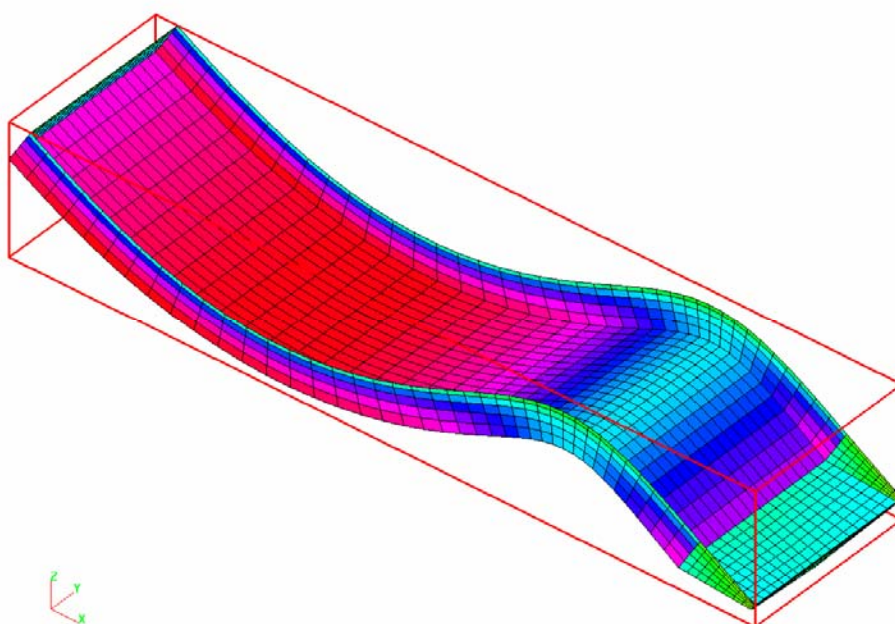
Slika 6.20 Apsolutne vrijednosti amplituda normiranih modova spregnutog horizontalnog i torzijskog odziva

Pojedine krivulje odnose se na određenu vrijednost omjera valne duljine i duljine broda, λ/L_{pp} , kao izvoda susretne frekvencije, ω_e . Iz navedenih slika vidljivo je da su amplitude elastičnih modova istog reda veličine kao i one krutih modova. Također je vidljivo da se amplitude elastičnih modova naglo prigušuju s porastom rednog broja, što upućuje na brzu konvergenciju rješenja.

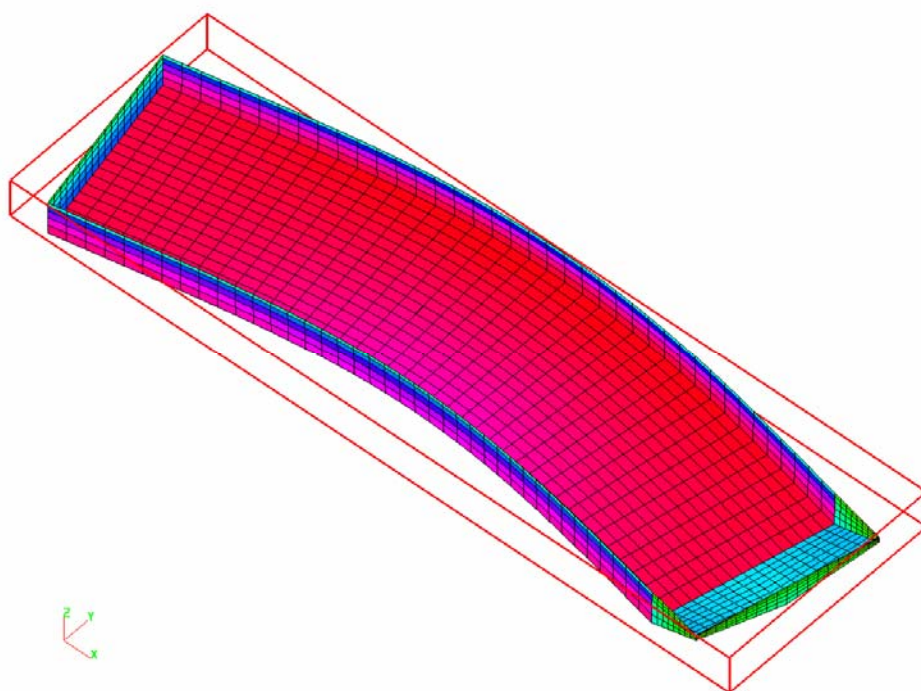
Po prva dva suha oblika vertikalnih i spregnutih vibracija barže prikazana su na slikama 6.21 i 6.22, odnosno 6.23 i 6.24.



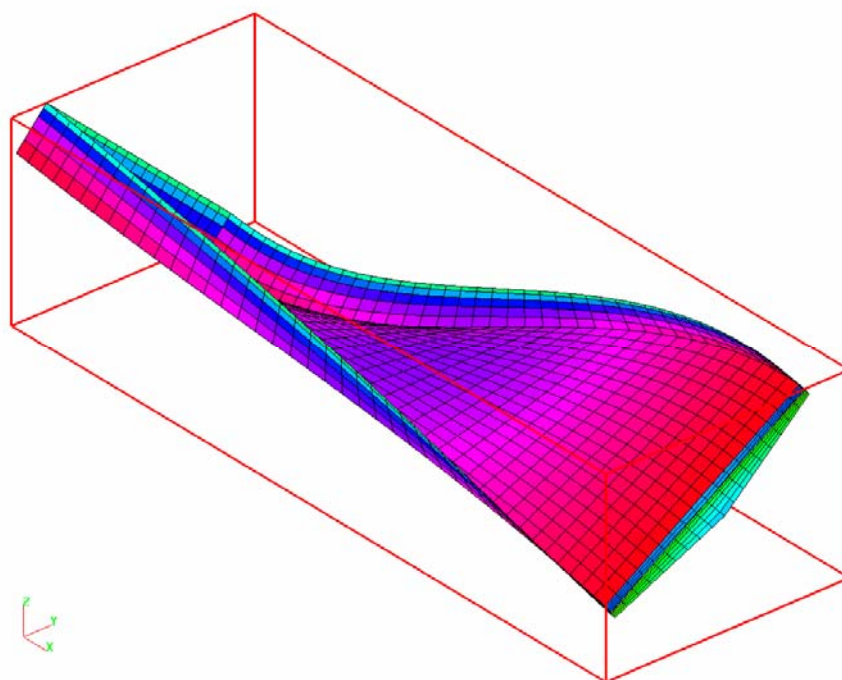
Slika 6.21 Prvi suhi prirodni oblik vertikalnih vibracija barže, $\omega_1 = 5.21 \text{ rad/s}$



Slika 6.22 Drugi suhi prirodni oblik vertikalnih vibracija barže, $\omega_2 = 12.37 \text{ rad/s}$



Slika 6.23 Prvi suhi prirodni oblik spregnutih vibracija barže, $\omega_1 = 5.32 \text{ rad/s}$



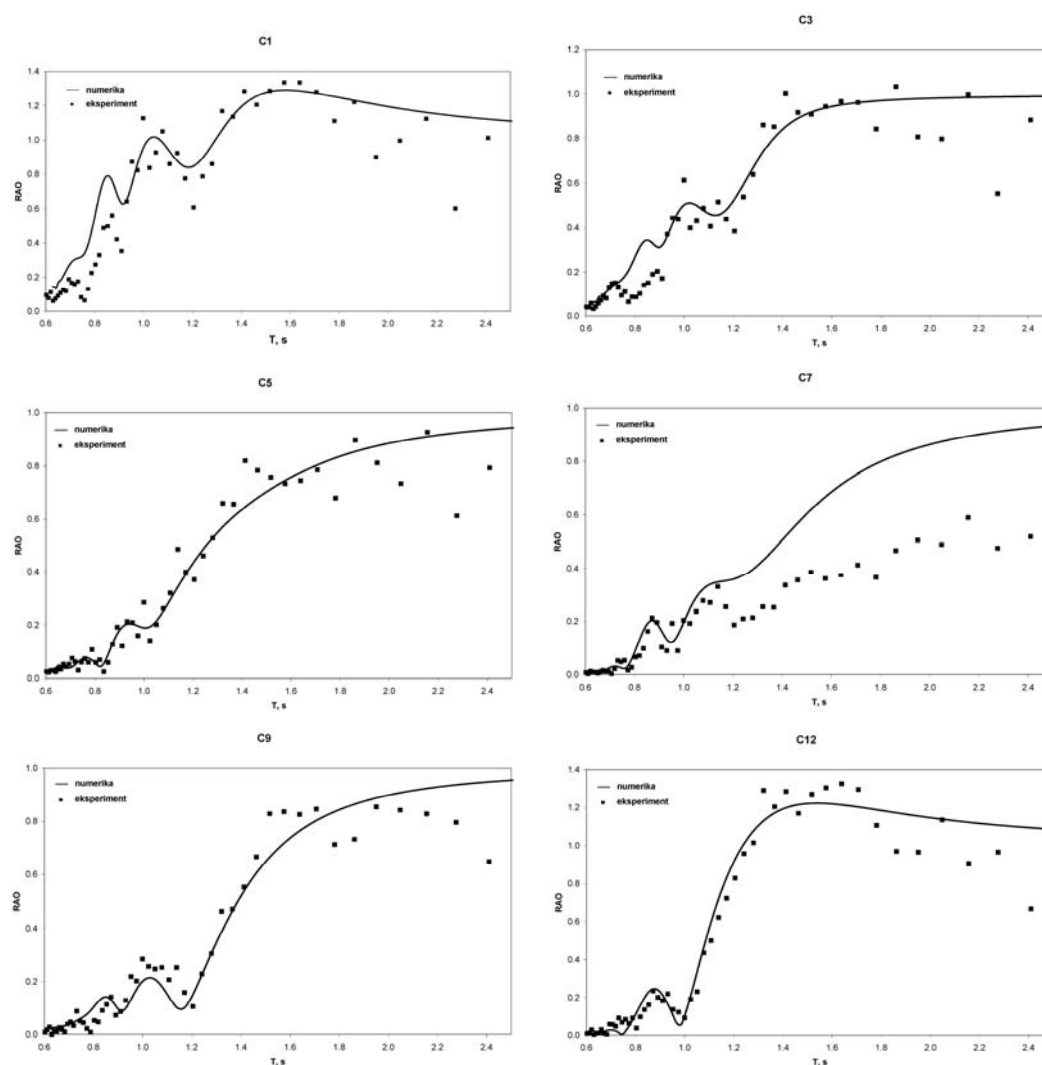
Slika 6.24 Drugi suhi prirodni oblik spregnutih vibracija barže, $\omega_2 = 7.92 \text{ rad/s}$

Vidljivo je da kod prvog oblika spregnutih vibracija dominira horizontalno savijanje, a kod drugog uvijanje.

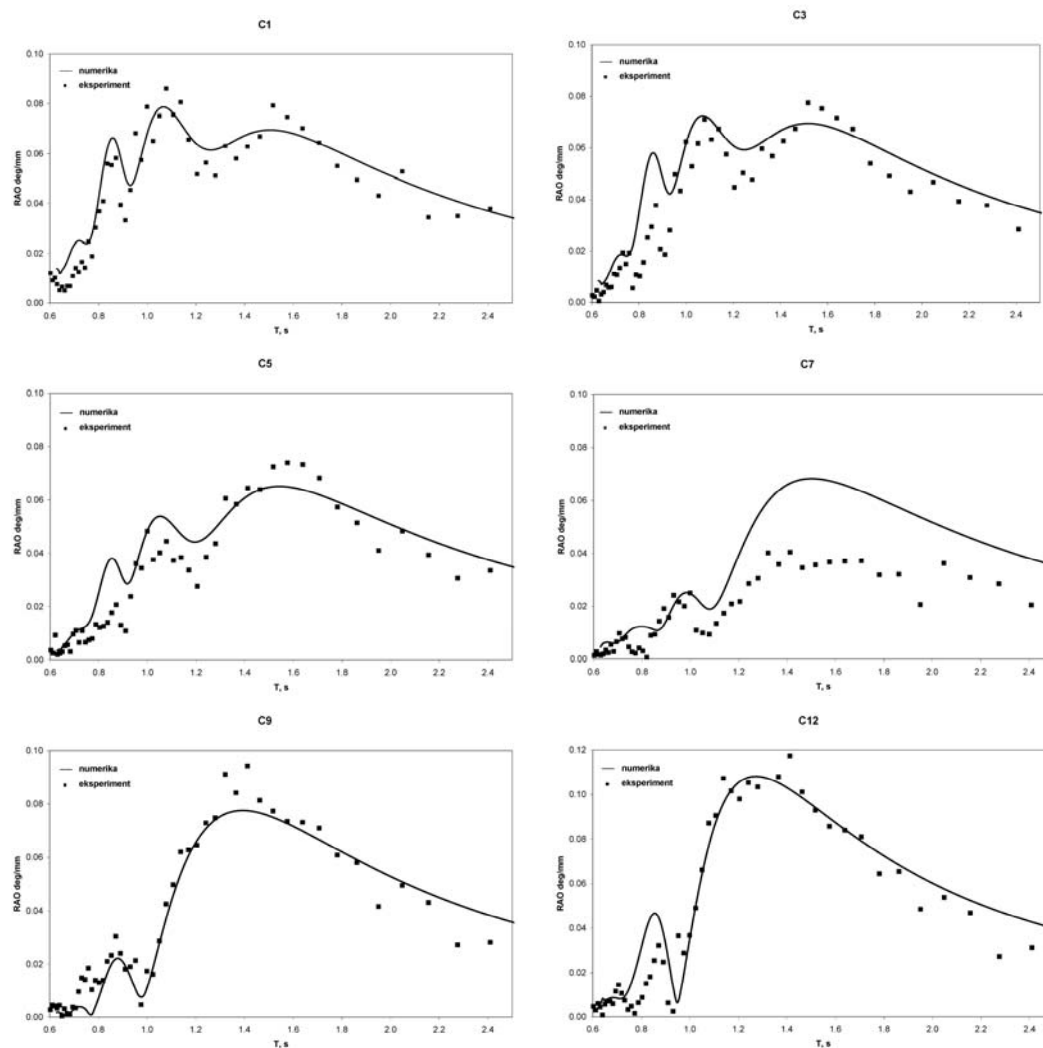
Numerički proračuni odziva elastične barže na (pravilnim) valovima provedeni su za isti skup susretnih kutova za koji su obavljena i modelska ispitivanja.

Usporedba rezultata numeričkog proračuna i mjerenja u frekvencijskom području

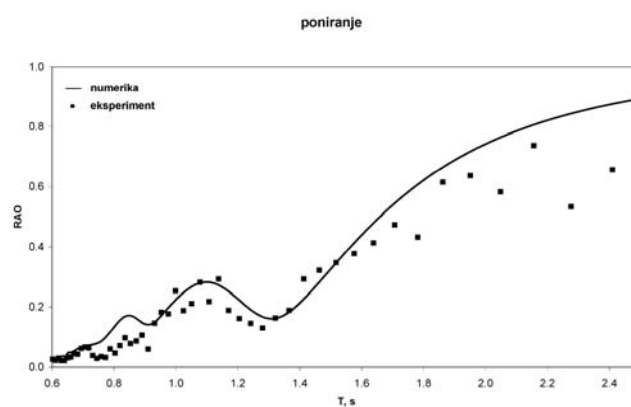
Zbog opsežnosti, neće se izložiti svi dobiveni rezultati. Odziv broda u vertikalnoj ravnini prikazat će se za slučaj valova u pramac broda, kada postiže maksimalne vrijednosti. Na slikama 6.25 i 6.26 prikazane su prenosne funkcije poniranja i posrtanja u šest referentnih točaka, dok slike 6.27 i 6.28 donose one njihovih prosječnih vrijednosti koje vrijede za baržu.



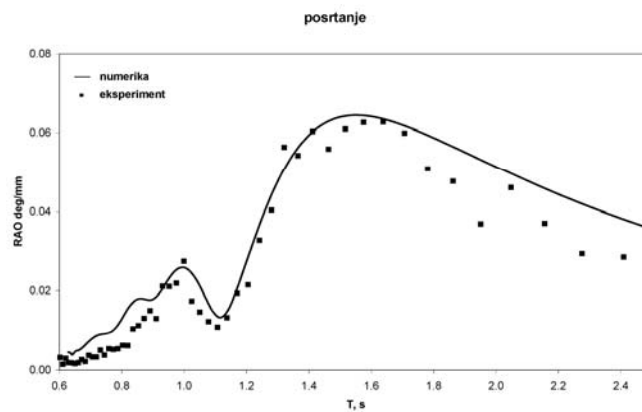
Slika 6.25 Prenosne funkcije poniranja u šest referentnih točaka



Slika 6.26 Prenosne funkcije posrtanja u šest referentnih točaka

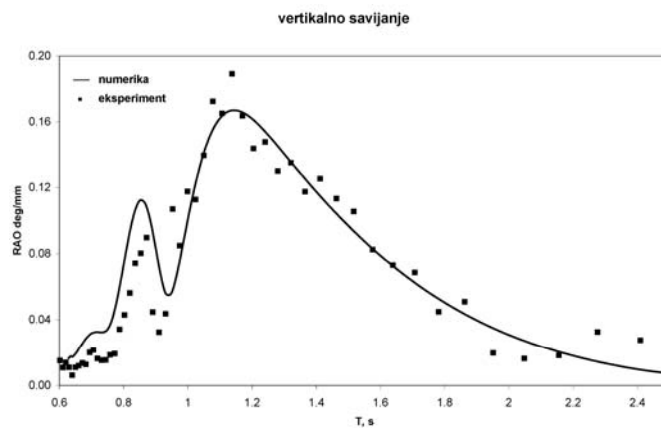


Slika 6.27 Prenosna funkcija poniranja barže



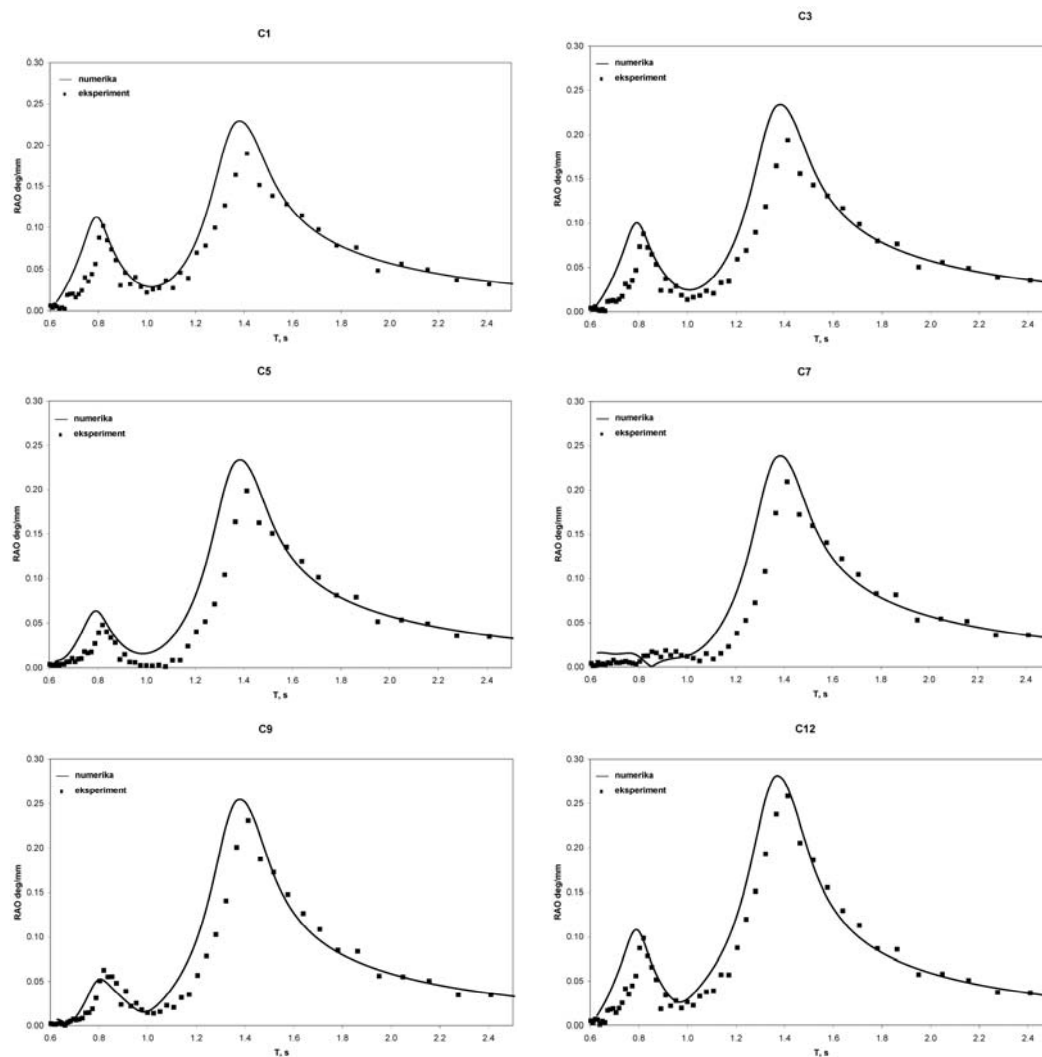
Slika 6.28 Prenosna funkcija posrtanja barže

Vertikalno savijanje, čija je prenosna funkcija na slici 6.29, definirano je kao razlika u posrtanju između prvog i posljednjeg pontona, odnosno između referentnih točaka C1 i C12.

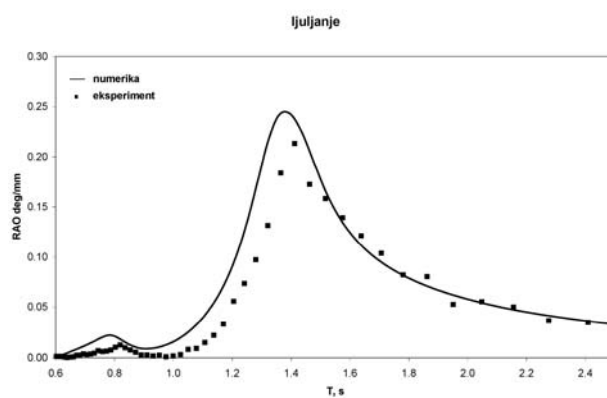


Slika 6.29 Prenosna funkcija vertikalnog savijanja barže

Spregnuto horizontalno savijanje i uvijanje razmatrat će se kod susretnog kuta $\beta=120^\circ$, kod kojeg je vrijednost odziva značajna. Prenosne funkcije lžuljanja u šest referentnih točaka donosi slika 6.30, dok je na slici 6.31 prenosna funkcija lžuljanja barže, dobivena uprosječivanjem vrijednosti u tim točkama.

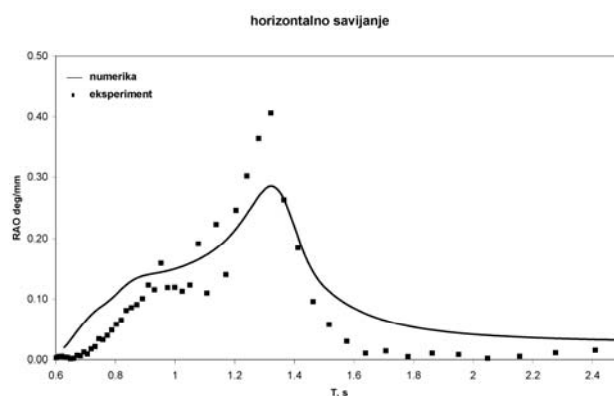


Slika 6.30 Prenosne funkcije ljuľanja u šest referentnih toćaka

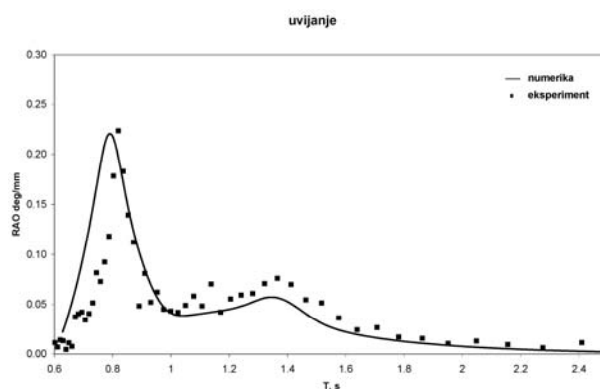


Slika 6.31 Prenosna funkcija ljuľanja barēe

Analogno vertikalnom savijanju, horizontalno je savijanje definirano kao razlika u zaošijanju, a uvijanje kao razliku u ljuljanju između prvog i posljednjeg pontona, odnosno između referentnih točaka C1 i C12. Njihove prenosne funkcije prikazane su na slikama 6.32 i 6.33.



Slika 6.32 Prenosna funkcija horizontalnog savijanja barže



Slika 6.33 Prenosna funkcija uvijanja barže

Prilikom rješavanja jednadžbe gibanja, modalno je prigušenje uvećano za određeni postotak kritičnog prigušenja:

$$n_{cr} = 2\sqrt{km} ,$$

čime se obuhvaća strukturno i viskozno prigušenje. Konačne su vrijednosti dobivene prilagođavanjem numeričkih krivulja rezultatima mjerenja i malo se razlikuju od vrijednosti izračunatih na temelju rezultata eksperimenta prigušenih prirodnih vibracija:

Zalijetanje:	0% (2%)
Zanošenje:	0% (4%)

Poniranje:	5% (6%)
Ljuljanje:	5% (4%)
Posrtanje:	5% (6%)
Zaošijanje:	0% (5%)
Vertikalno savijanje:	5% (7.5%)
Horizontalno savijanje:	9% (2.5%)
Uvijanje:	7% (2.5%)

Prilično velike vrijednosti dodatnog prigušenja mogu se fizikalno pojasniti – u hidroelastičnoj analizi segmentirana se barža modelira (neprekinutim) jednotrupcem. Ta pretpostavka ne utječe značajno na određivanje hidrostatičkih i hidrodinamičkih koeficijenata, ali se, kod ispitivanja modela, stvara dodatni otpor gibanju između čelâ susjednih pontona (učinak pumpe!) koji je, prilikom provođenja numeričkog proračuna, potrebno simulirati nešto većim prigušenjem.

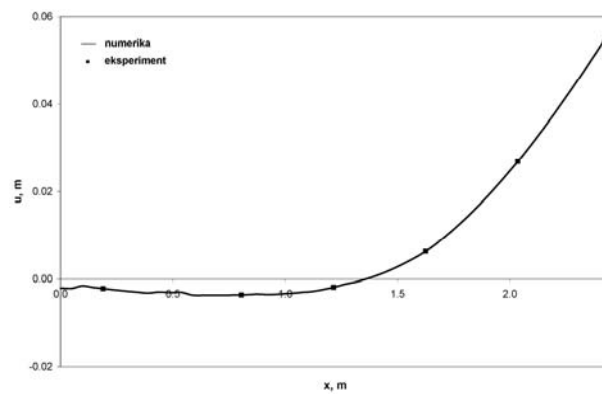
Prikazane prenosne funkcije odnose se na spektar visine vala [61]. Stoga se krivulje poniranja (translacijsko gibanje) asimptotski približavaju jediničnoj vrijednosti s porastom perioda, dok se prenosne funkcije ljuljanja i posrtanja (rotacijska gibanja) približavaju nuli.

Relativno veliko rasipanje prenosnih funkcija određenih modelskim ispitivanjima može se pripisati provođenju eksperimenata na nemirnom moru. Dobiveni rezultati pokazuju jako dobro podudaranje izračunatih vrijednosti s izmjerjenima. Nešto veća odstupanja javljaju se u području vrhova pojedinih krivulja, kada je, zbog fenomena rezonancije, uloga (približno određenog) prigušenja važnija. Prenosne funkcije poniranja i posrtanja (slike 6.25 i 6.26) za referentnu točku C7 pokazuju značajnije odstupanje numeričkog modela od eksperimenta, što upućuje na mjernu pogrešku u toj točki. Ispravno bi mjerenje rezultiralo i boljim podudaranjem desnih strana krivulja (prosječnog) poniranja i posrtanja (slike 6.27 i 6.28).

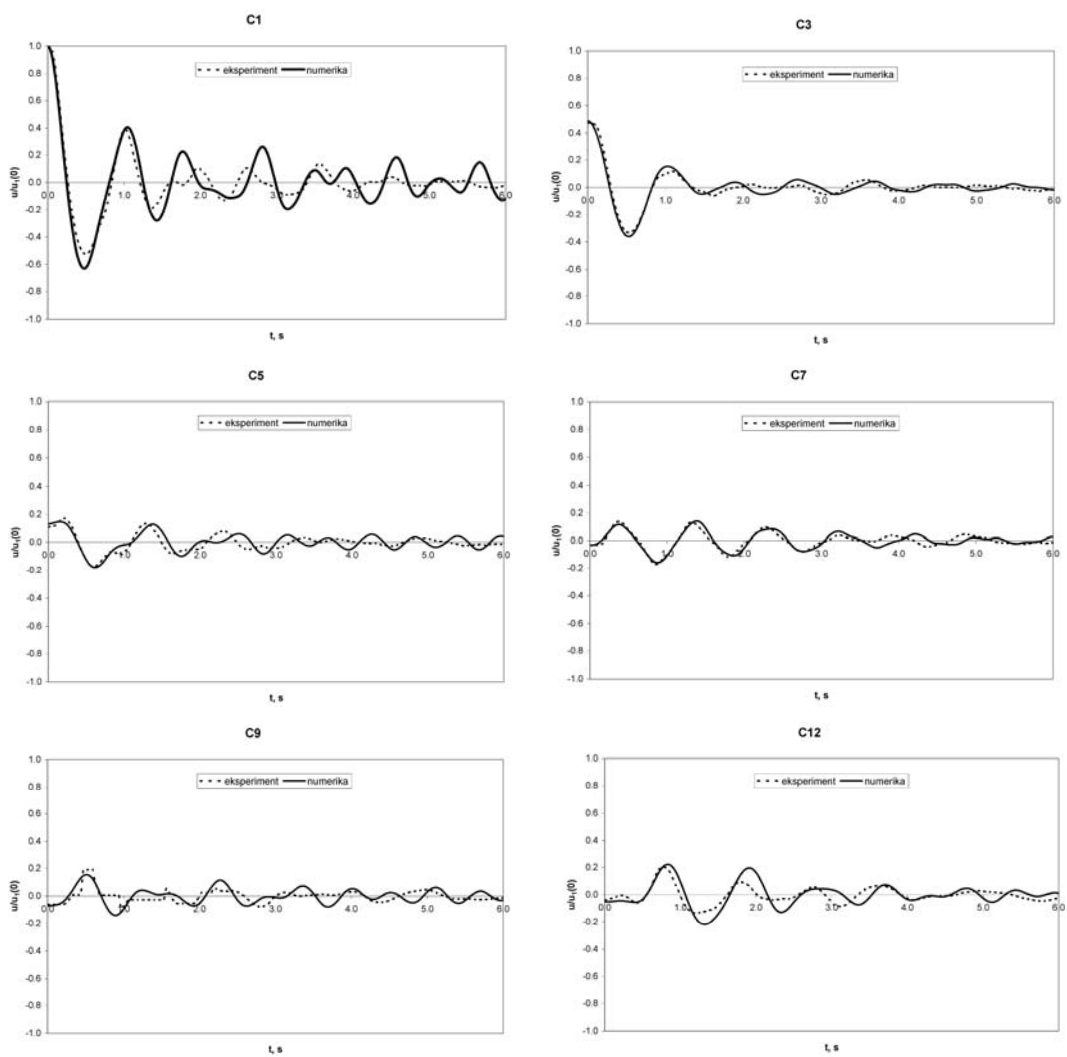
Usporedba rezultata numeričkog proračuna i mjerenja u vremenskom području

Valjanost primjene razvijenog numeričkog modela za proračun prolaznog odziva (u vremenskom području), može se provjeriti usporedbom numeričkih rezultata s rezultatima mjerenja prigušenih slobodnih vibracija na mirnoj vodi.

Najprije je potrebno početnu deformaciju elastične barže, dobivenu izvlačenjem prvog pontona na određenu visinu, prikazati u obliku sume nekoliko suhih prirodnih oblika, slika 6.34. Slika 6.35 donosi usporedbu vertikalnog pomaka referentnih točaka u vremenu, pri čemu je potrebno napomenuti kako su svi pomaci normalizirani dijeljenjem početnim pomakom referentne točke C1.



Slika 6.34 Numeričko simuliranje početnih deformacija elastične barže



Slika 6.35 Vertikalni pomaci referentnih točaka u vremenu

I u vremenskom je području postignuto relativno dobro podudaranje rezultata proračuna, u pogledu amplitude i perioda odziva, dobivenih predloženim numeričkim modelom s rezultatima modelskih ispitivanja.

6.3. Odziv kontejnerskog broda na valovima

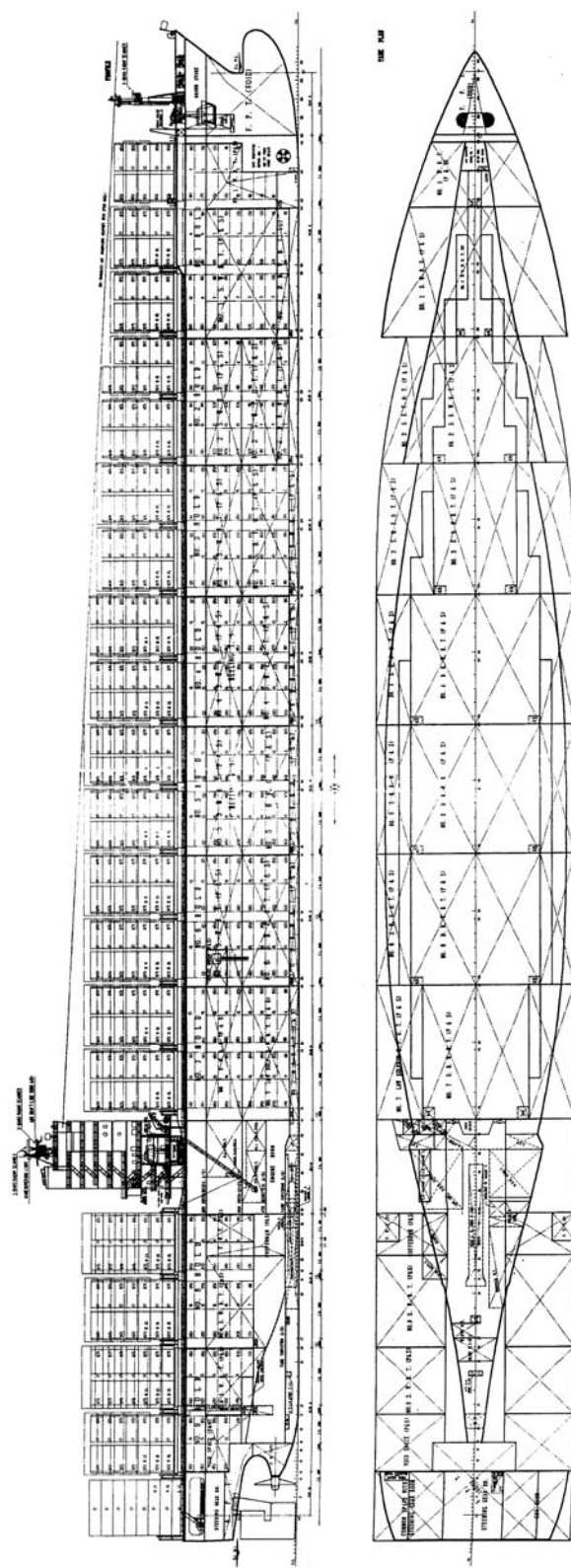
Nakon što je, provjerom na pojednostavljenom primjeru prizmatičnog nosača i usporedbom s rezultatima eksperimenata u bazenu, dokazana valjanost predloženog pristupa proračuna hidroelastičnog odziva na valovima, isti će se primijeniti i na suvremeni jako veliki kontejnerski brod (engl. *Very Large Container Ship - VLCS*), nosivosti 8200 (7800) TEU, koji je, u klasi Bureau Veritasa, izgrađen u korejskom brodogradilištu *Hyundai*.

Na slici 6.36 pojednostavljeni je opći plan broda, dok njegove glavne izmjere donosi tablica 6.2. Glavno rebro već je prikazano je na slici 6.1.

Tablica 6.2 Glavne izmjere kontejnerskog broda nosivosti 8200 TEU

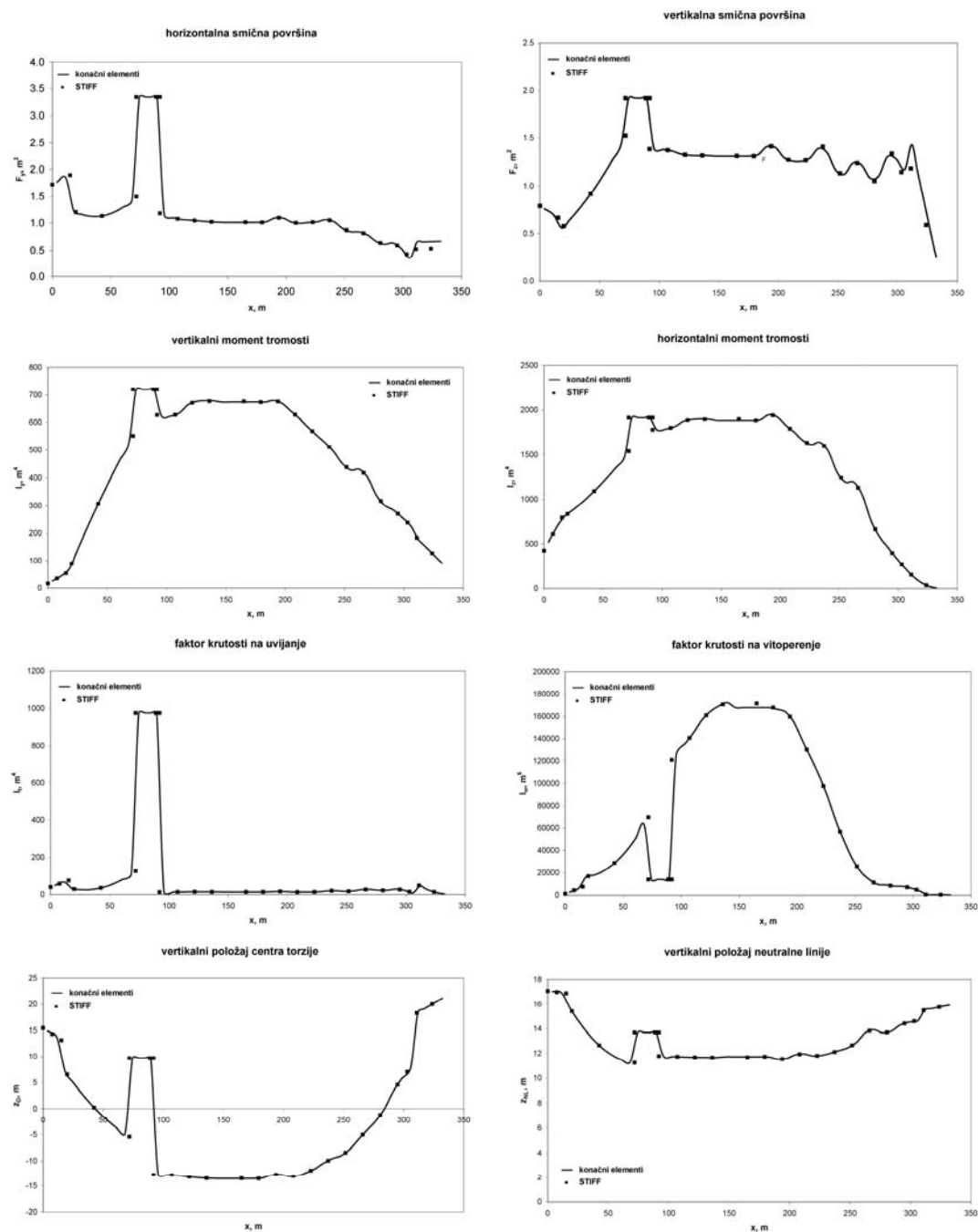
Duljina preko svega	$L_{oa} = 334.07 \text{ m}$
Duljina između okomica	$L_{pp} = 319.00 \text{ m}$
Širina	$B = 42.8 \text{ m}$
Visina	$D = 24.6 \text{ m}$
Gaz	$T = 14.5 \text{ m}$
Brzina	$v = 25.4 \text{ čv}$
Snaga motora	$P = 69\,620 \text{ kW}$
Masa lakog broda	$L = 33682.2 \text{ t}$
Istisnina (potpuno nakrcan brod)	$\Delta = 135\,336.3 \text{ t}$
Istisnina (brod u balastu)	$\Delta = 68\,386.8 \text{ t}$

Najveći broj dosad izgrađenih post-panamax kontejnerskih brodova osnovan je upravo po ovom projektu [14].



Slika 6.36 Opći plan broda

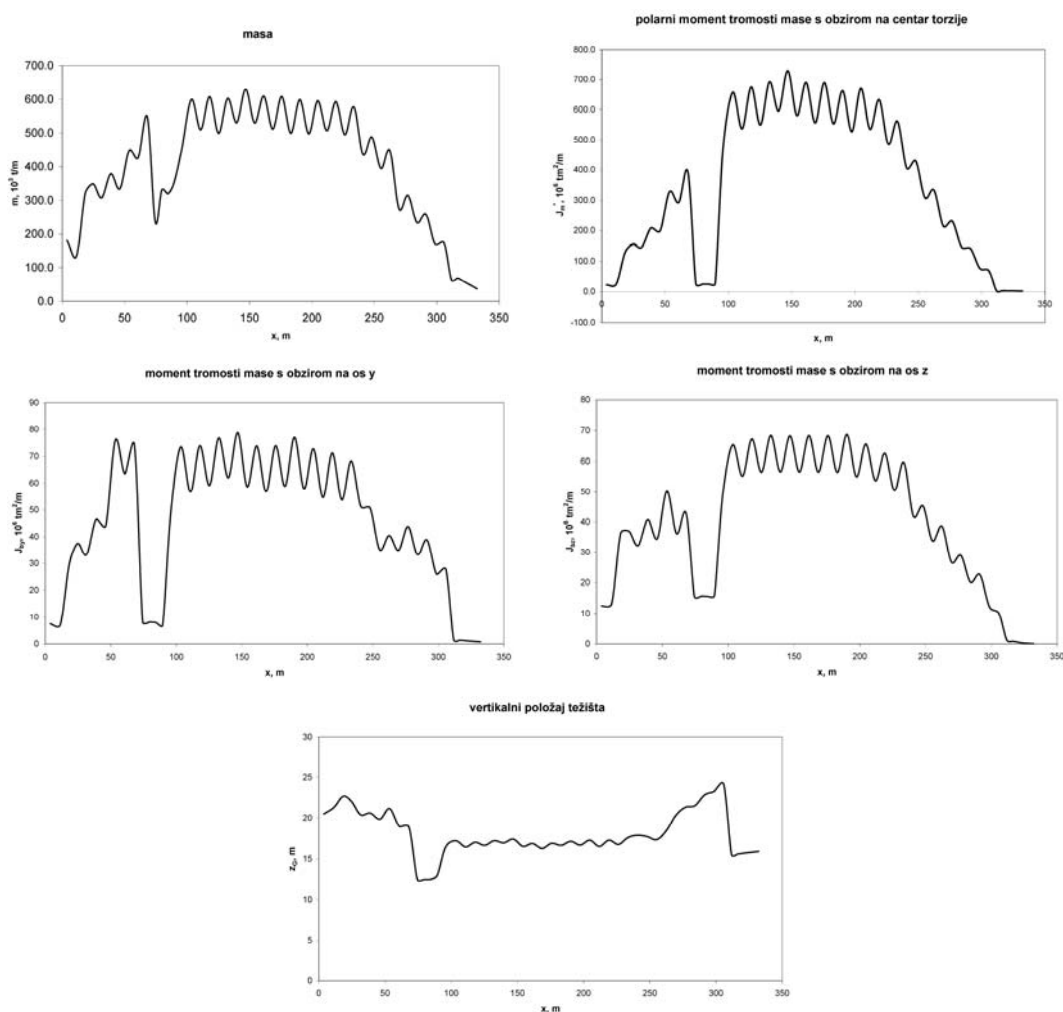
Trup broda podijeljen je na 50 konačnih elemenata. Elementi zatvorenog poprečnog presjeka koriste se na krmi broda (elementi 1 – 2), u području strojarnice (elementi 11 – 14) te na pramcu (elementi 45 – 50).



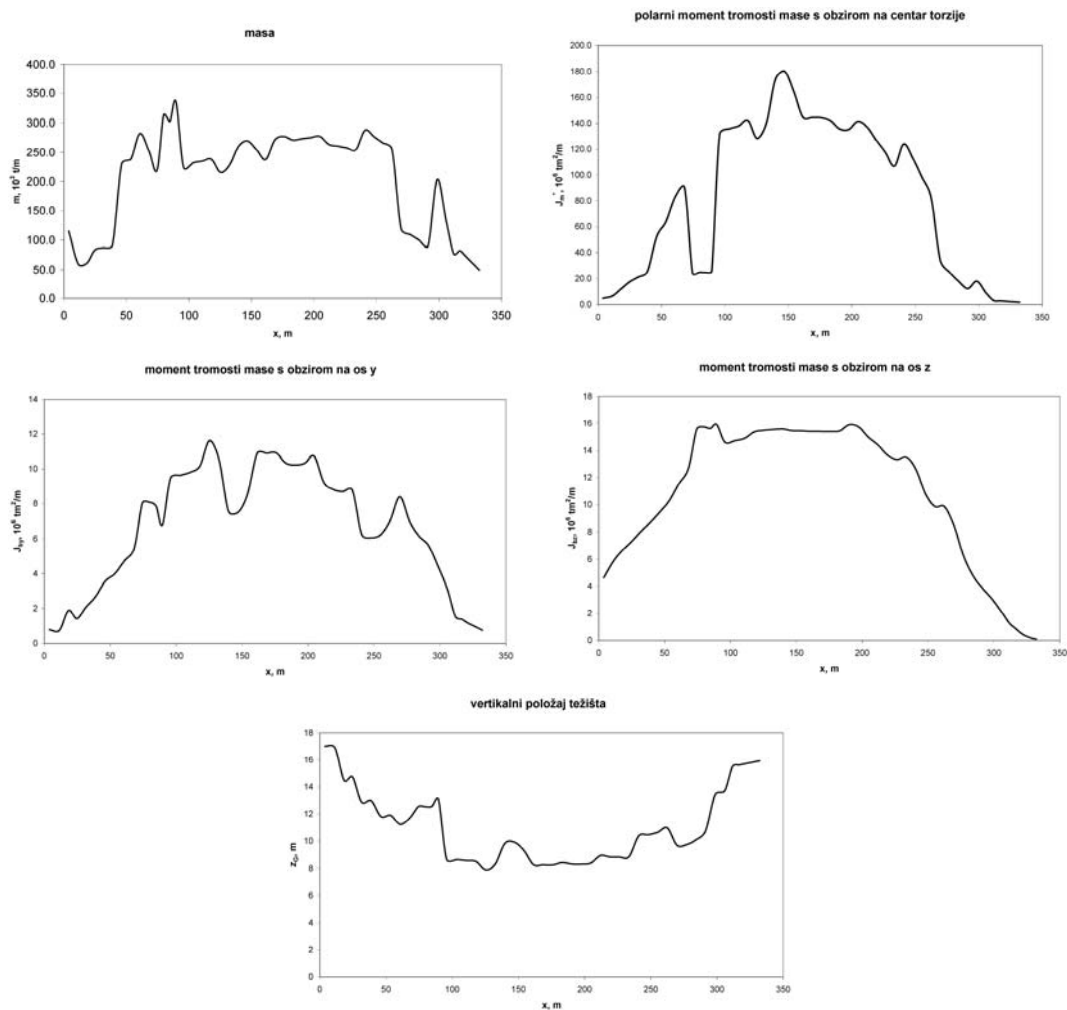
Slika 6.37 Geometrijske značajke poprečnih presjeka duž kontejnerskog broda

Geometrijske značajke određene su programom STIFF [72] za 26 poprečnih presjeka duž broda. Slika 6.37 prikazuje interpolaciju (koja se provodi unutar programa DYANA) tako izračunatih vrijednosti na konačne elemente strukturnog modela.

Razmatraju se dva stanja krcanja – potpuno nakrcan brod (stanje krcanja 17 iz *Knjige trima i stabiliteta*) i brod u balastu (stanje krcanja 5). Slike 6.38 i 6.39 donose raspodjelu inercijskih značajki po konačnim elementima za ta dva stanja krcanja. Valovitost dijagrama na prvoj od tih slika posljedica je koncentracije mase tereta po međusobno razmaknutim grupama (*engl. bay*) kontejnera.



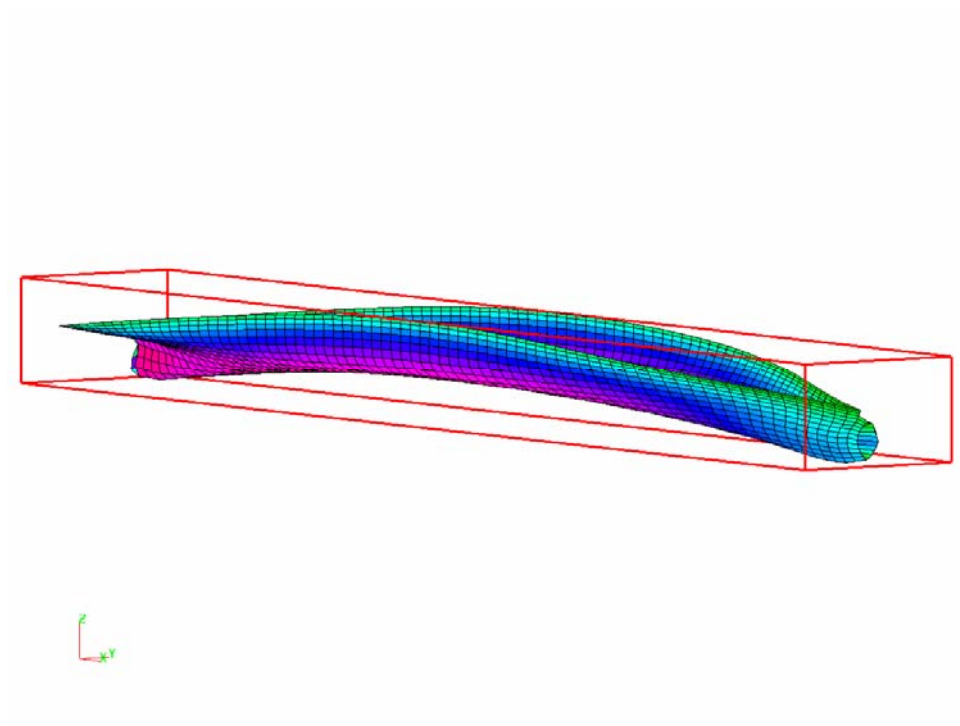
Slika 6.38 Inercijske značajke konačnih elemenata za potpuno nakrcan brod



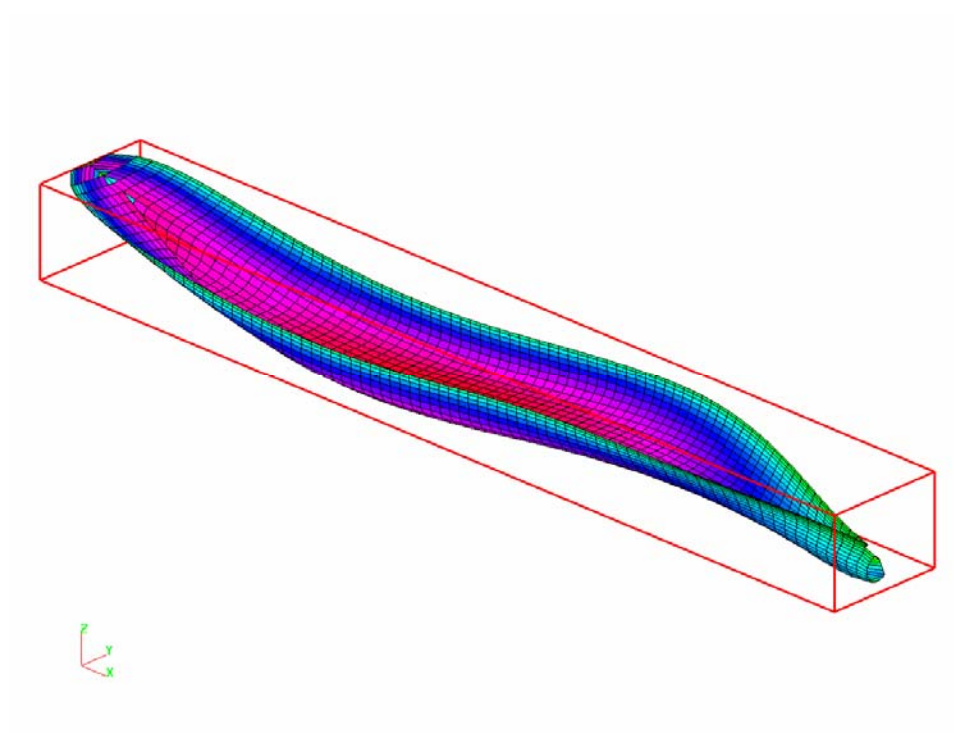
Slika 6.39 Inercijske značajke konačnih elemenata za brod u balastu

Za oba stanja krcanja, hidroelastični odziv kontejnerskog broda na valovima određen je na temelju šest komponenti njihovanja krutog tijela, prvih pet suhih prirodnih oblika vertikalnih vibracija i prvih deset suhih prirodnih oblika spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija dobivenih na strukturnom modelu.

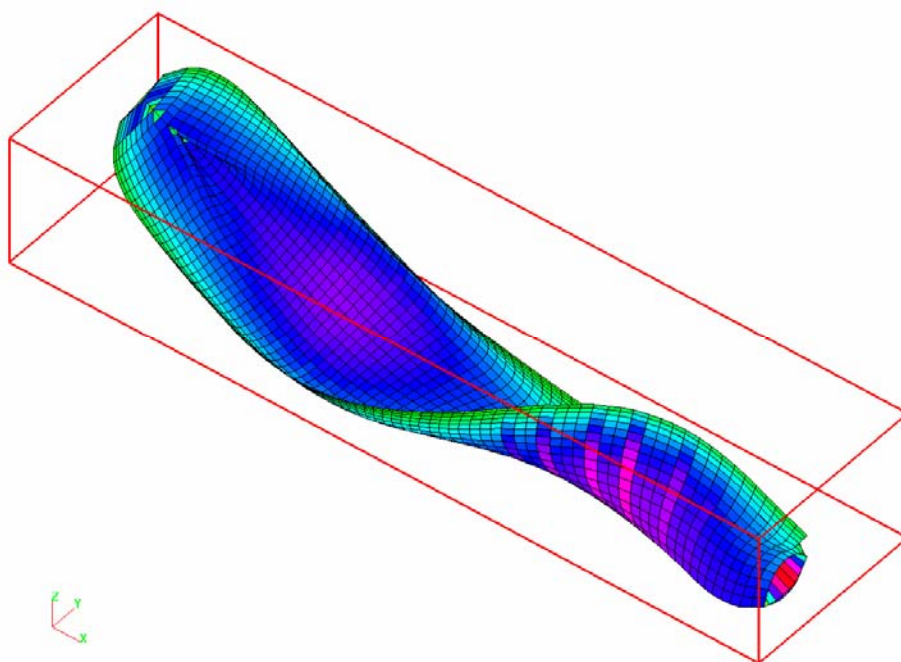
Na slikama 6.40 – 6.43 prikazana su po prva dva suha oblika vertikalnih i spregnutih vibracija potpuno nakrcanoga kontejnerskog broda. Prvim oblikom spregnutih vibracija dominira uvijanje, a drugim horizontalno savijanje.



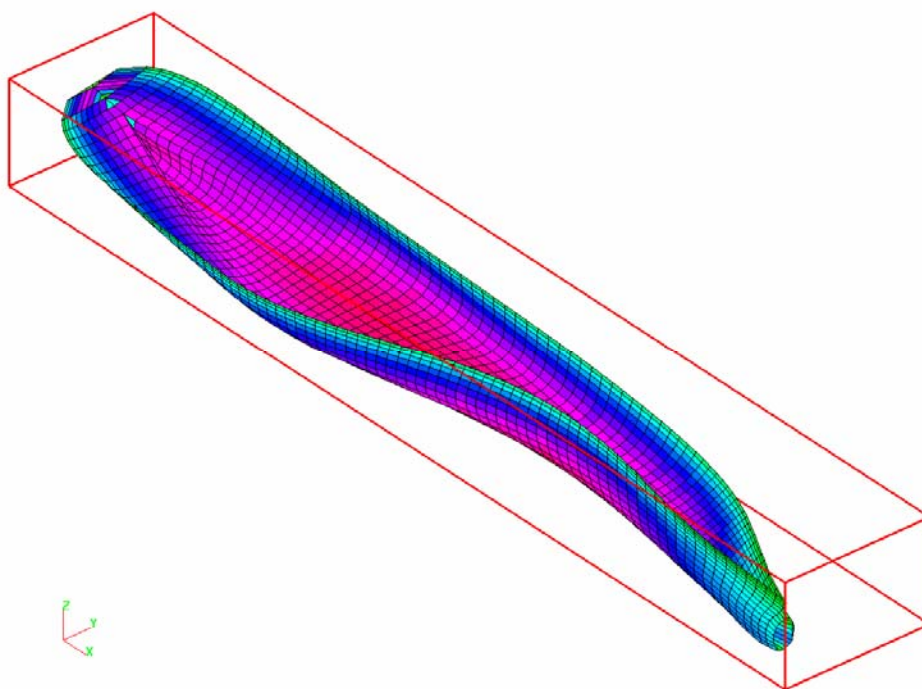
Slika 6.40 Prvi suhi prirodni oblik vertikalnih vibracija, $\omega_1 = 4.01 \text{ rad/s}$



Slika 6.41 Drugi suhi prirodni oblik vertikalnih vibracija, $\omega_2 = 8.43 \text{ rad/s}$



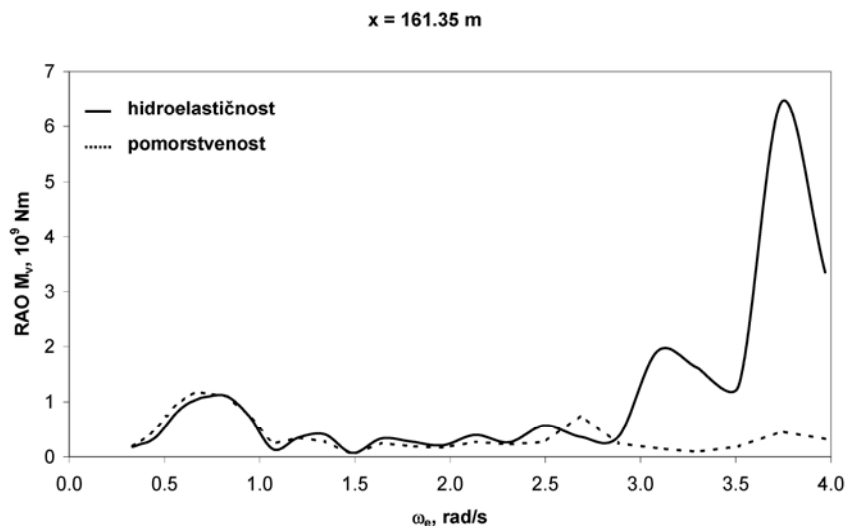
Slika 6.42 Prvi suhi prirodni oblik spregnutih vibracija, $\omega_1 = 2.32 \text{ rad/s}$



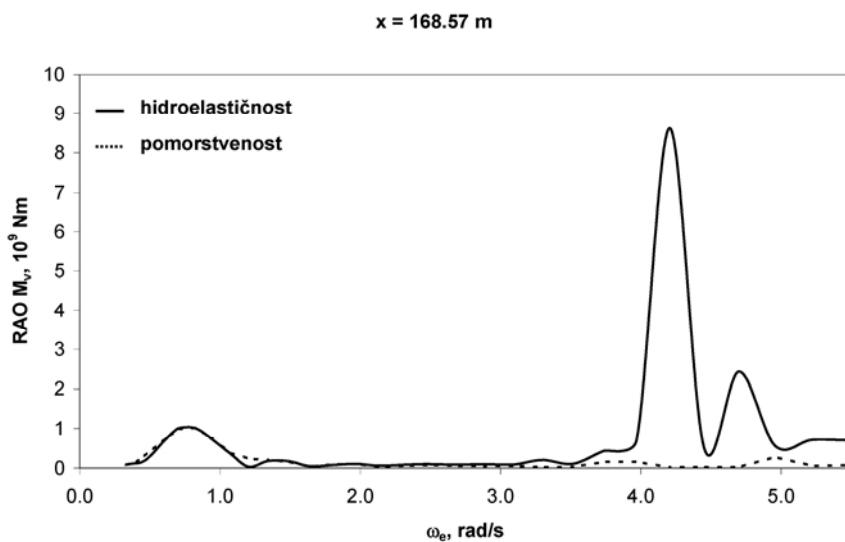
Slika 6.43 Drugi suhi prirodni oblik spregnutih vibracija, $\omega_2 = 4.38 \text{ rad/s}$

Ponovno se, zbog obima, neće prikazati svi dobiveni rezultati, već će se odziv broda u vertikalnoj ravnini promatrati samo za slučaj valova u pramac broda.

Rezultati odziva hidroelastičnog modela usporedit će se s onima koji proizlaze iz klasičnog proračuna pomorstvenosti, u kojem se, primjenom izvornog programa HYDROSTAR, određuje dinamički odziv istoga kontejnerskog broda kao krutog tijela.

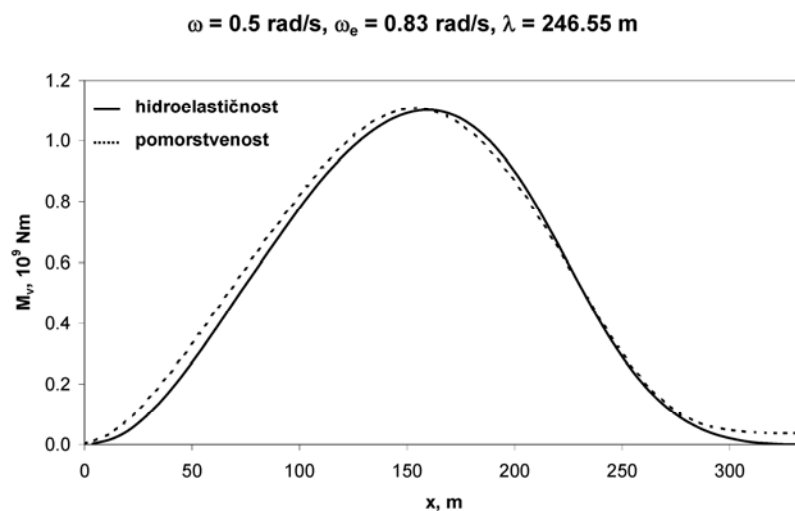


Slika 6.44 Prenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja po sredini potpuno nakrcanog broda, $x = 161.35 \text{ m}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$

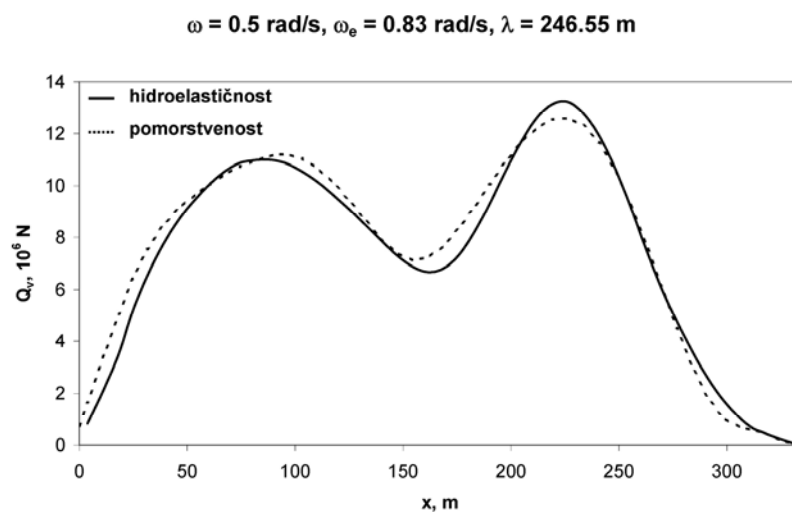


Slika 6.45 Prenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja po sredini broda u balastu, $x = 168.57 \text{ m}$, $\beta = 180^\circ$, $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$

Na slikama 6.44 i 6.45 prikazane su prenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja po sredini kontejnerskog broda za dva razmatrana stanja krcanja. S približavanjem susretne frekvencije prvoj prirodnoj frekvenciji vertikalnih vibracija kontejnerskog broda u moru, postaje sve važnije u analizu dinamičkog odziva na valovima uključiti i odgovarajuće elastične oblike vibriranja. Ona, u slučaju potpuno nakrcanog broda, iznosi oko 3.7 rad/s, slika 6.44, dok se njena vrijednost za brod u balastu kreće oko 4.2 rad/s, slika 6.45.

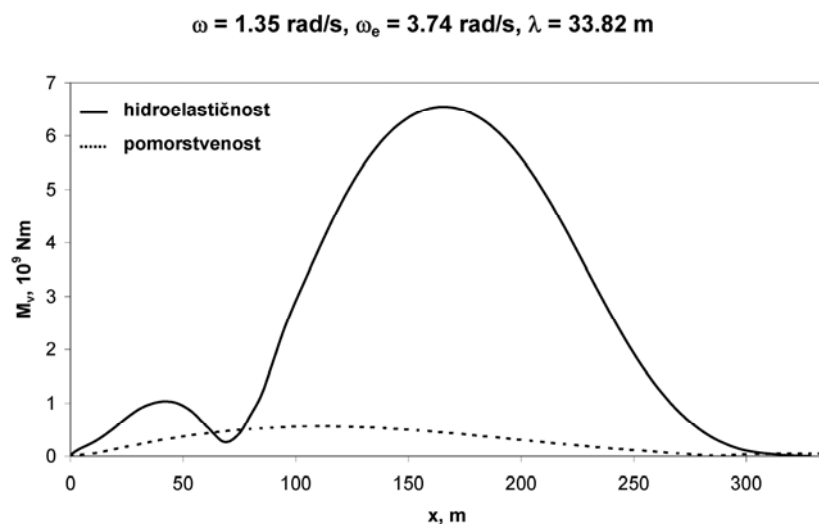


Slika 6.46 Vertikalni moment savijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.5 \text{ rad/s}, \beta = 180^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}, h = 2 \text{ m}$

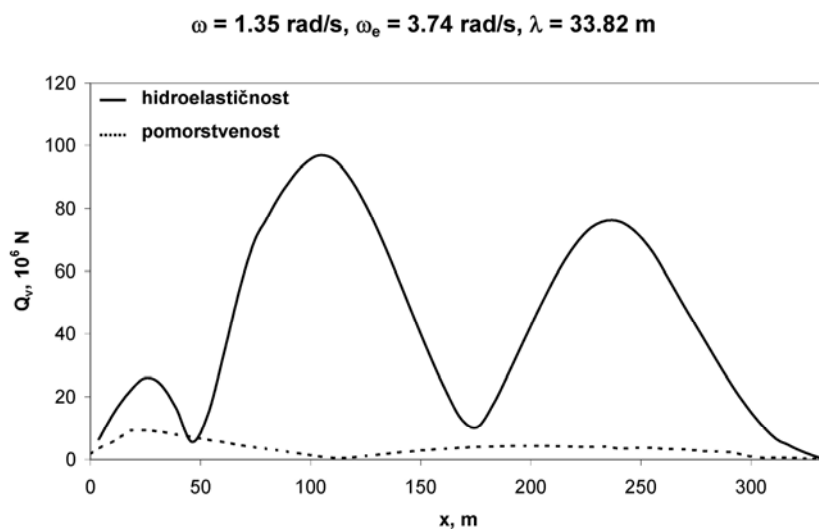


Slika 6.47 Vertikalna smična sila za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.5 \text{ rad/s}, \beta = 180^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}, h = 2 \text{ m}$

U slučaju provođenja klasičnog hidrodinamičkog proračuna, ekstremna se vrijednost amplitude vertikalnog momenta savijanja (vidi prilog 1), za potpuno nakrcan brod, dobiva za valove frekvencije $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$, odnosno za omjer valne duljine i duljine broda između okomica $\lambda/L_{pp} = 0.77$, slika 6.46. U tom rasponu frekvencija hidrodinamički i hidroelastični proračuni rezultiraju približno jednakim vrijednostima unutrašnjih sila.

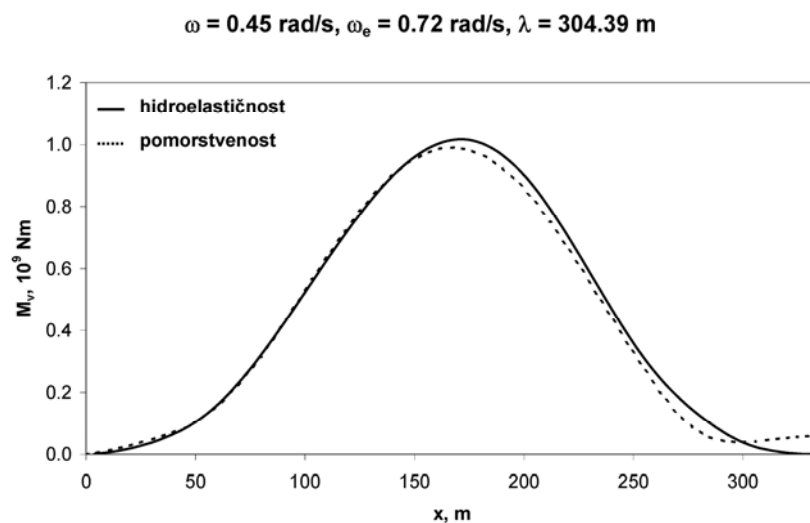


Slika 6.48 Vertikalni moment savijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.35 \text{ rad/s}, \beta = 180^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}, h = 2 \text{ m}$

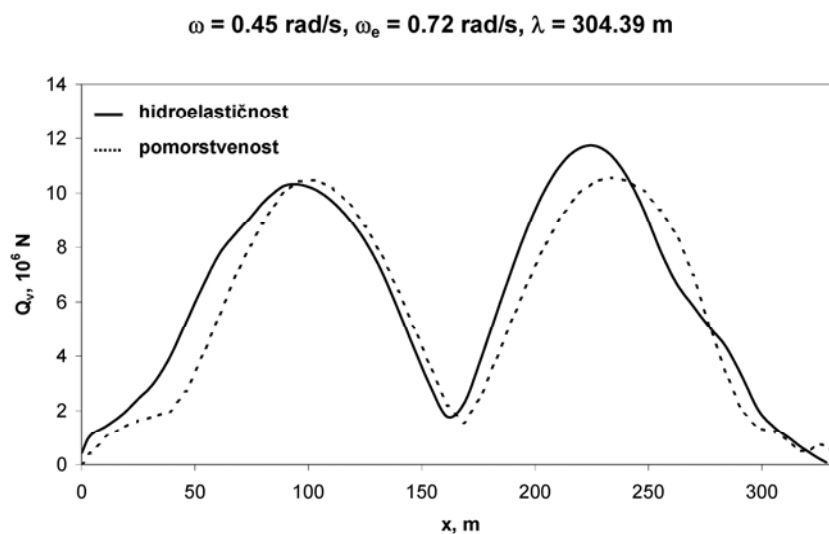


Slika 6.49 Vertikalna smična sila za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.35 \text{ rad/s}, \beta = 180^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}, h = 2 \text{ m}$

Na valovima viših frekvencija dolazi do izražaja važnost nezanemarivanja elastičnog deformiranja brodske konstrukcije. Slike 6.48 i 6.49 donose raspodjelu amplituda unutrašnjih sila za frekvenciju vala $\omega = 1.35 \text{ rad/s}$, koja rezultira susretnom frekvencijom bliskom prvoj prirodnoj frekvenciji vertikalnih vibracija potpuno nakrcanog broda.

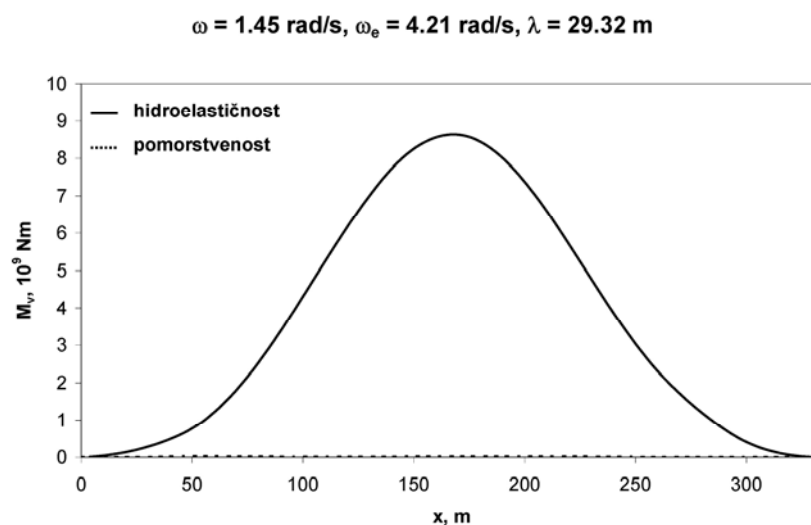


Slika 6.50 Vertikalni moment savijanja za brod u balastu, $\omega = 0.45 \text{ rad/s}, \beta = 180^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}, h = 2 \text{ m}$

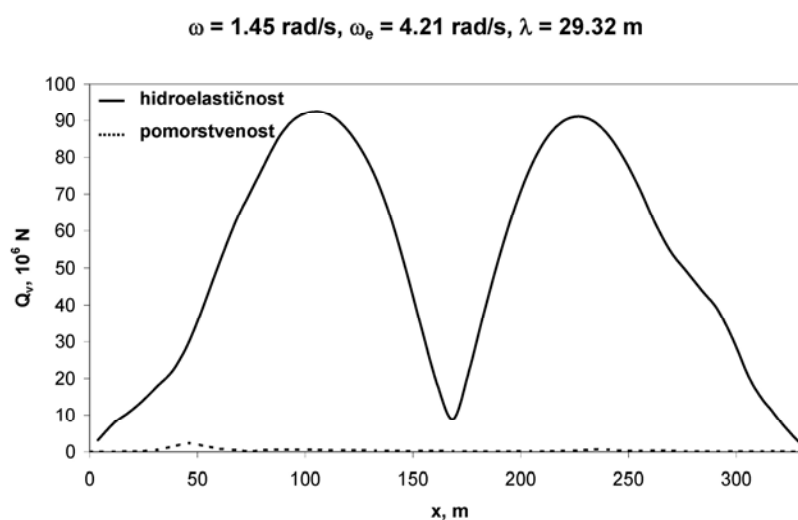


Slika 6.51 Vertikalna smična sila za brod u balastu, $\omega = 0.45 \text{ rad/s}, \beta = 180^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}, h = 2 \text{ m}$

Ekstremna vrijednost amplitude vertikalnog momenta savijanja, u slučaju broda u balastu kao krutog tijela, dobiva se kod frekvencije $\omega = 0.45 \text{ rad/s}$ ($\lambda/L_{pp} = 0.95$), slika 6.50. Uzme li se u obzir međudjelovanje fluida i konstrukcije, znatno veće ekstremne vrijednosti unutarnjih sila dobivaju se za val frekvencije $\omega = 1.45 \text{ rad/s}$, slike 6.52 i 6.53.

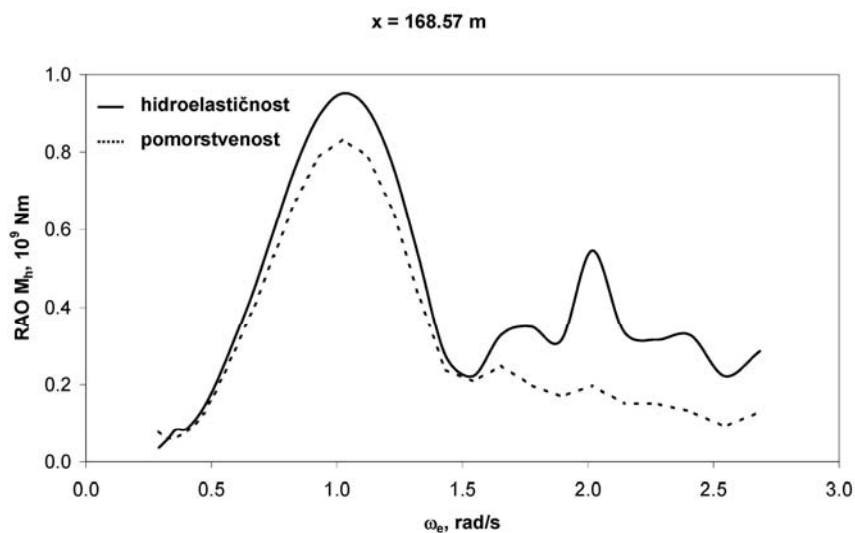


Slika 6.52 Vertikalni moment savijanja za brod u balastu, $\omega = 1.45 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$

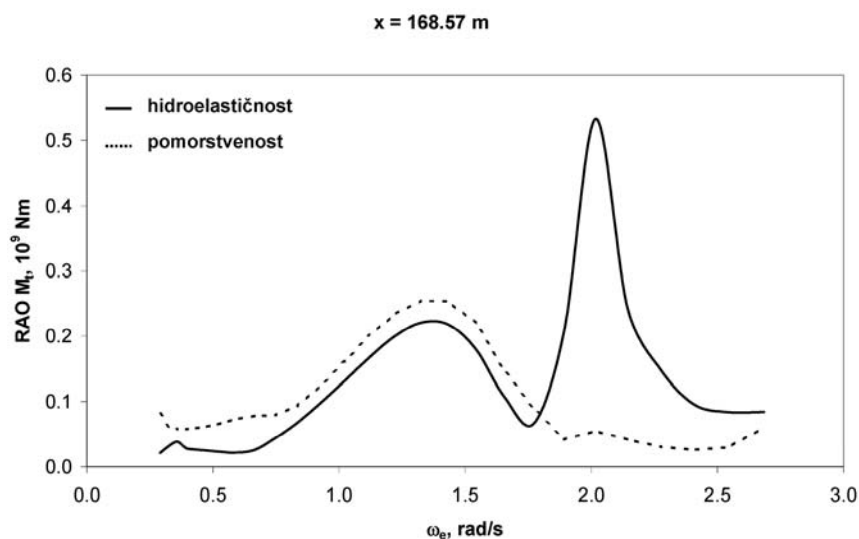


Slika 6.53 Vertikalna smična sila za brod u balastu, $\omega = 1.45 \text{ rad/s}$, $\beta = 180^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$

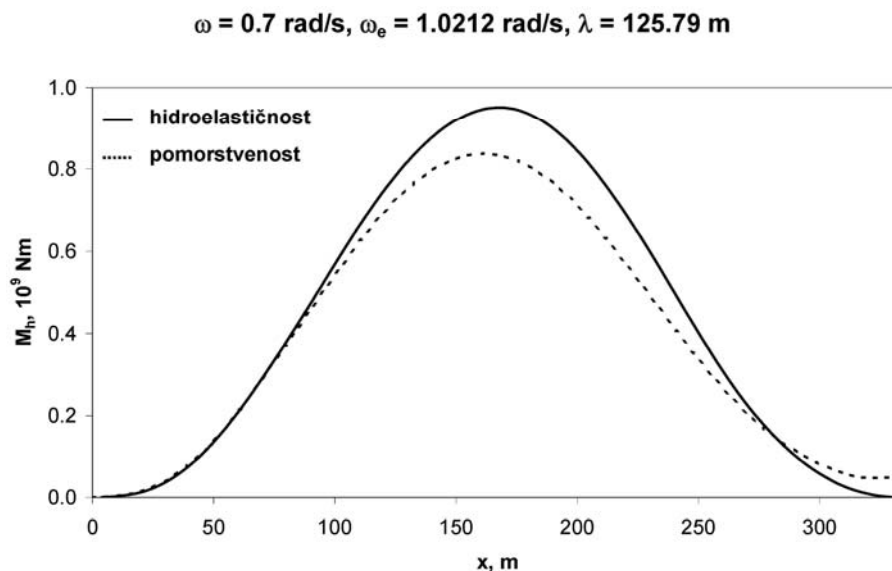
Spregnuto horizontalno savijanje i uvijanje razmatraju se na valovima koji s pravcem napredovanja broda zatvaraju susretni kut $\beta=120^\circ$. Slike 6.54 i 6.55 prikazuju prenosne funkcije horizontalnog momenta savijanja i momenta uvijanja po sredini potpuno nakrcanog broda. Može se očitati da vrijednost prve prirodne frekvencije spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija broda u moru iznosi oko $\omega = 2$ rad/s.



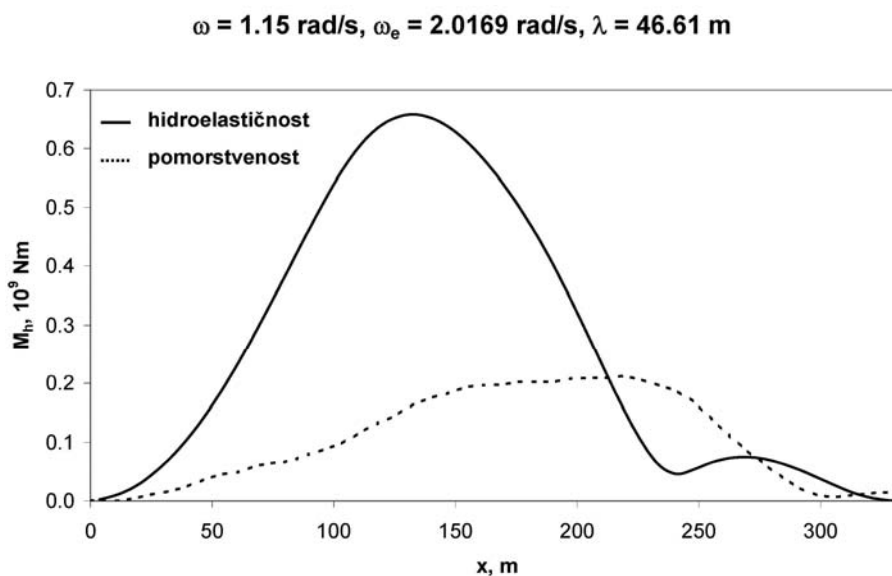
Slika 6.54 Prenosne funkcije horizontalnog momenta savijanja po sredini potpuno nakrcanog broda, $x = 168.57$ m, $\beta = 120^\circ$, $U = 25$ čv, $h = 2$ m



Slika 6.55 Prenosne funkcije momenta uvijanja po sredini potpuno nakrcanog broda, $x = 168.57$ m, $\beta = 120^\circ$, $U = 25$ čv, $h = 2$ m



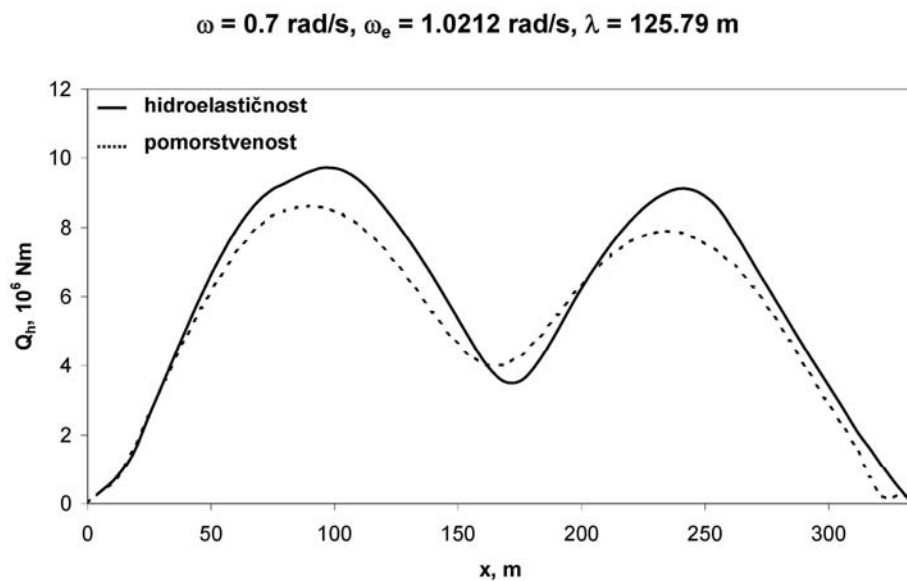
Slika 6.56 Horizontalni moment savijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.7 \text{ rad/s}, \beta = 120^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}, h = 2 \text{ m}$



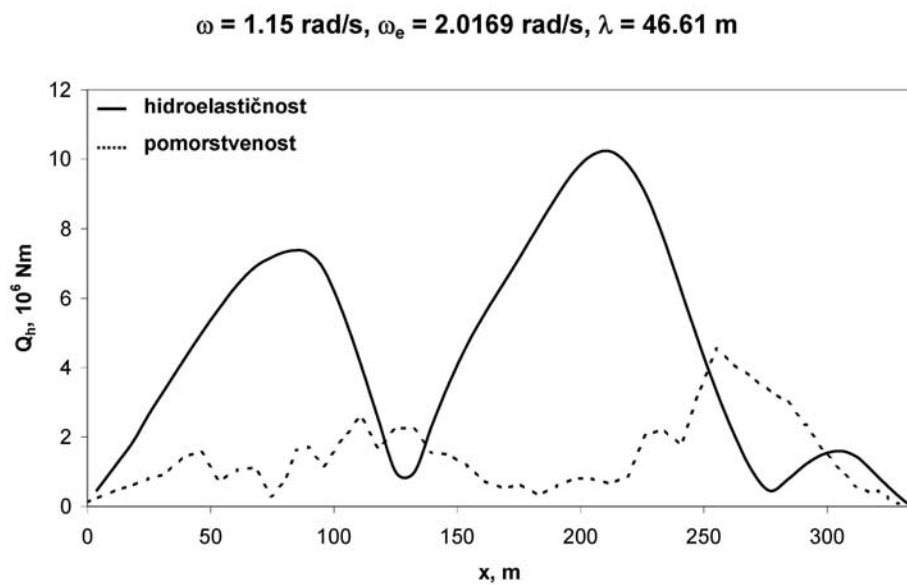
Slika 6.57 Horizontalni moment savijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.15 \text{ rad/s}, \beta = 120^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}, h = 2 \text{ m}$

Slike 6.56 i 6.57 prikazuju amplitudu horizontalnog momenta savijanja u području rezonancije krutog tijela ($\omega = 0.7 \text{ rad/s}, \lambda/L_{pp} = 0.39$), odnosno, u području rezonancije elastičnih deformacija ($\omega = 1.15 \text{ rad/s}, \lambda/L_{pp} = 0.15$).

Za iste frekvencije, amplitude horizontalnih smičnih sila prikazane su na slikama 6.58 i 6.59.

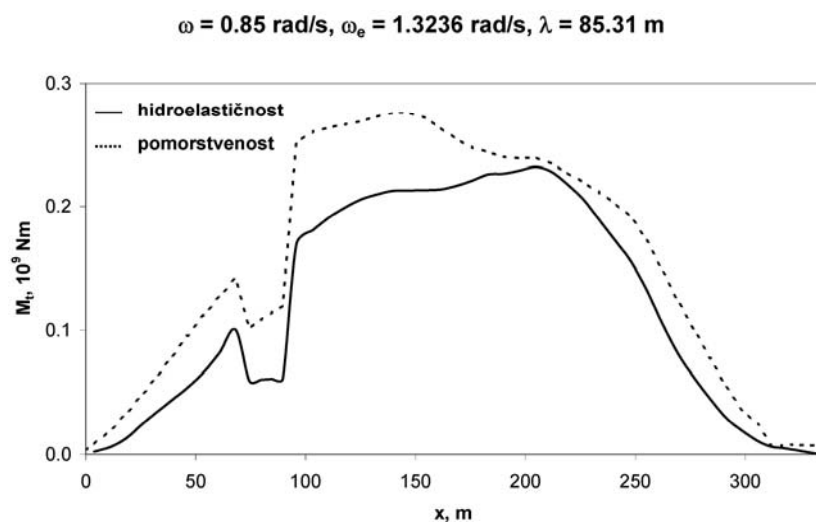


Slika 6.58 Horizontalna smična sila za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$

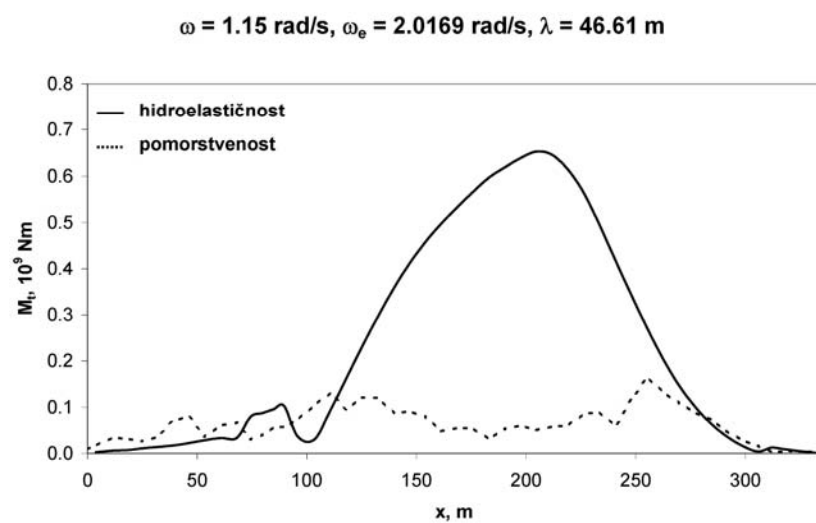


Slika 6.59 Horizontalna smična sila za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.15 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$

U slučaju momenta uvijanja, ekstremne vrijednosti amplituda dobivaju se za val frekvencije $\omega = 0.85 \text{ rad/s}$ ($\lambda/L_{pp} = 0.27$), slika 6.60, odnosno, $\omega = 1.15 \text{ rad/s}$ ($\lambda/L_{pp} = 0.15$), slika 6.61. Potrebno je napomenuti kako su prikazane vrijednosti momenta uvijanja određene u centrima torzije pojedinih konačnih elemenata.



Slika 6.60 Moment uvijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 0.85 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$



Slika 6.61 Moment uvijanja za potpuno nakrcan brod, $\omega = 1.15 \text{ rad/s}$, $\beta = 120^\circ$,
 $U = 25 \text{ čv}$, $h = 2 \text{ m}$

7. ZAKLJUČAK

7.1. Općenito

Živimo u vremenu dinamičnih promjena na svjetskoj razini. Toliko spominjani (često i u negativnom kontekstu) proces globalizacije usko je povezan s kontejnerizacijom – kontejnerski brodovi predstavljaju izuzetno važan dio suvremenih (raznonačinskih) lanaca distribucije roba. Gotovo bi se moglo reći kako je ostvaren svojevrsni *perpetuum mobile* – učinkoviti, pouzdani i ekonomični tokovi sirovina, poluproizvoda i gotovih proizvoda (omogućeni izumom kontejnera) potiču širenje prakse globalnog poslovanja po just-in-time (proizvodnoj) filozofiji; što, istovremeno, podiže potražnju za transportom roba kontejnerima i tako, posredno, dovodi do daljnjih poboljšanja unutar sustavâ distribucije.

Treća faza kontejnerizacije, započeta sredinom devedesetih godina prošlog stoljeća, karakterizirana je ne samo neprestanim porastom maksimalne veličine kontejnerskih brodova kojem se zasad ne nazire kraj (*Emma Mærsk*, kapaciteta većeg od 11 000 TEU, trenutno je najveći brod u službi), već i značajnim povećanjem broja vrlo velikih post-panamax brodova na svjetskim morima.

Budući da bi osnivanje takvih brodova prema poluempirijskim pravilima klasifikacijskih društava zahtijevalo ekstrapoliranje van iskustvene baze na kojoj se ona temelje, nužno je provođenje direktnih proračuna valnog opterećenja i čvrstoće.

Osim toga, suvremeni kontejnerski brodovi izuzetno su elastični, tako da se više, kod određivanja njihovog dinamičkog odziva, ne može zanemariti međudjelovanje fluida i konstrukcije. Stoga je, umjesto klasičnog pristupa koji kombinira neku od teorija pomorstvenosti s (kvazistatičkom) strukturnom analizom (elastičnog) modela, nužno primijeniti pristup hidroelastične analize.

Na taj se način mogu pouzdanije zadovoljiti projektni kriteriji granične čvrstoće (podrhtavanje trupa uslijed udaranja pramca o valove stvara dodatne momente savijanja koji mogu ugroziti primarnu čvrstoću trupa) i zamora materijala konstrukcijskih detalja (zanemarivanjem utjecaja pruženja broda može se znatno podcijeniti akumulirano oštećenje).

Dok su hidroelastični modeli uspješno primijenjeni na najrazličitije vrste brodova kod kojih je relevantan odziv u vertikalnoj ravnini, situacija je znatno lošija kad je riječ o kontejnerskim brodovima kod kojih, zbog širokih otvora na palubi i snižene krutosti na uvijanje, najniži prirodni oblici pripadaju spregnutim horizontalnim i torzijskim vibracijama.

Iz svega navedenog, očigledno je da postoji snažna potreba za razvojem pouzdanog alata za određivanje hidroelastičnog odziva suvremenih vrlo velikih kontejnerskih brodova.

Kao prikladan za ranu fazu osnivanja broda, ovom se disertacijom predlaže učinkovit linearni numerički model, dobiven kombiniranjem jednodimenzionalnog strukturnog modela s trodimenzionalnim hidrodinamičkim modelom.

Prirodni oblici (vertikalnih, horizontalnih, torzijskih i/ili spregnutih horizontalnih i torzijskih) vibracija grednog strukturnog modela konačnih elemenata na zraku određuju se računalnim programom DYANA, razvijenim na temelju već postojećeg programa za rješavanje slobodnih vertikalnih vibracija u moru [82] i globalnog modela konačnih elemenata za proračun spregnutih vibracija [44, 49-51]. Istim se programom, uz modalne mase i krutosti, određuju i koeficijenti povratne sile.

Ostatak hidrodinamičkih koeficijenata (dodatnu masu, prigušenje i uzbudnu silu) iz jednadžbe gibanja osigurava inačica Bureau Veritasovog programa HYDROSTAR koja, uz njihanje krutog tijela, uključuje i elastične suhe prirodne oblike vibriranja oplakane površine. Hidrodinamički se model temelji na linearnoj teoriji potencijalnog strujanja, a radijacijsko-difrakcijski problem graničnih vrijednosti rješava se metodom integralnih jednadžbi, pri čemu se učinak brzine napredovanja obuhvaća intuitivnom metodom susretne frekvencije.

Sprezanje strukturnog i hidrodinamičkog modela provodi se metodom superponiranja prirodnih oblika, uobičajene kod proračuna prisilnih vibracija na osnovi rezultata prethodno provedenih analiza slobodnih vibracija, na način da se čvorni pomaci grednog modela *rasprše* na pomake željenih točaka (središta panela) na oplakanoj površini trupa.

Jednažba gibanja može se riješiti u frekvencijskom i vremenskom području. Pruženje, rezonantno vibriranje (gotovo isključivo prvog oblika) do kojeg dolazi zbog neprekinute valne uzbuđe (na umjerenim stanjima mora), razmatra se u frekvencijskom području – prenosne funkcije odziva broda na harmonijskom valu određuju se ovdje razvijenim programom MECAP.

Nasuprot tome, u vremenskom je području (program TDP) moguće jednostavno uključiti nelinearnosti (u uzbudnu silu), što je prikladno za proučavanje podrhtavanja, prolaznog vibriranja trupa zbog djelovanja impulsnog opterećenja (poput udaranja dna ili izboja pramca o valove). Značaj podrhtavanja osobito je velik kod linijskih kontejnerskih brodova, budući da oni najčešće plove pod veoma striktnim vremenskim ograničenjima pa kapetani, u slučaju lošeg vremena i oštrog mora, imaju smanjenu mogućnost usporavanja broda i promjene smjera plovidbe. Kod suvremenih velikih kontejnerskih brodova, veća nosivost postiže se, između ostalog, i povećavanjem površine palube, što dovodi do značajnog izboja pramca i povećane podložnosti udaranju pramca o valove.

Valjanost predložene metode potvrđena je numeričkim primjerima. Izvrsno podudaranje rezultata proračuna suhih prirodnih oblika vibriranja (dobivenih programom DYANA) s analitičkim rješenjem diferencijalnih jednačbi spregnutih vibracija za pojednostavljeni primjer prizmatičnog nosača (s karakteristikama poprečnog presjeka jednakim onima glavnog rebra kontejnerskog broda nosivosti 8200 TEU), pokazalo je da odabrani strukturni model zadovoljava.

Pouzdanost ukupnog, hidroelastičnog modela provjerena je usporedbom s rezultatima namjernski provedenog eksperimentalnog ispitivanja izuzetno elastične (segmentirane) barže. Budući da je postignuto dosta dobro podudaranje izračunatog i izmjenjenog dinamičkog odziva za osjetljivu baržu (kod koje su amplitude elastičnih oblika istog reda veličine kao i one krutih pomaka), može se zaključiti kako su opisana metodologija i linearni matematički model pogodni za hidroelastičnu analizu kontejnerskih brodova, kod kojih će elastični oblici biti nižeg reda veličine u odnosu na komponente njihanja krutog tijela.

Odziv suvremenog post-panamax kontejnerskog broda na valovima određen je klasičnim proračunom pomorstvenosti (programom HYDROSTAR) i ovdje predloženim hidroelastičnim pristupom. Usporedba tako dobivenih rezultata pokazala je kako se kod proračuna dinamičke čvrstoće konstrukcijskih detalja ne smije zanemariti utjecaj pruženja broda.

7.2. Smjernice za daljnja istraživanja

U sklopu odobrenog znanstvenog projekta u nekoliko će se pravaca nastaviti istraživanje ovog zanimljivog problema. Budući da u klasifikacijskom društvu *Bureau Veritas* namjeravaju, u komercijalne svrhe, razviti postupak sprežanja trodimenzionalnog strukturnog modela s ovdje opisanim hidrodinamičkim modelom, bit će moguće dodatno provjeriti pouzdanost dobivenih rezultata proračuna hidroelastičnog odziva kontejnerskog broda. Veći je napor potrebno usmjeriti i u istraživanje hidroelastičnog odziva na impulsna opterećenja (udaranje pramca o valove, podvodne eksplozije) u vremenskom području. Moguće je poboljšati i ovdje primijenjeni način obuhvaćanja strukturnog i viskoznog prigušenja. Poseban izazov predstavlja (fizikalno opravdano, bez dodatnog pojednostavljivanja rubnog uvjeta na slobodnoj površini) rješavanje radijacijsko-difrakcijskog problema broda koji plovi stalnom brzinom. Na kraju, (linearni) hidrodinamički model može se značajno unaprijediti uključivanjem različitih nelinearnosti.

7.3. Zaključak doktorskog rada

Znanstveni doprinos disertacije sastoji se u razradi i proširenju otprije zacrtane metodologije hidroelastične analize. Sprezanjem vibracija, hidrostatike i hidrodinamike broda razvijen je matematički model i izrađen računalni program DYANA koji, uz (uobičajenu) Timošenkovu gredu za slučaj analize odziva broda u vertikalnoj ravnini, može koristiti i složeniji gredni model koji omogućuje simuliranje spregnutog horizontalnog savijanja i uvijanja brodova sa širokim otvorima na palubi. Tako se, na temelju bilo kakve kombinacije (odabranih komponenti) njihanja krutog tijela i suhih prirodnih oblika vertikalnih, horizontalnih, torzijskih i/ili spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija, može odrediti (potpuni) odziv elastičnog broda na valovima. Pouzdanost matematičkog modela provjerena je na rezultatima eksperimenata provedenih na segmentiranoj barži. Važnost hidroelastične analize potvrđena je naglim porastom vrijednosti unutrašnjih sila u slučaju rezonantnog elastičnog odziva brodskog trupa, što klasičnim postupkom analize pomorstvenosti broda kao krutog tijela nije moguće ustanoviti. Značaj doktorskog rada ogleda se u rasvjetljavanju problema hidroelastičnosti i novim spoznajama, razvoju postupka i programske podrške za uspješno osnivanje konstrukcije kontejnerskih brodova i povećanju njihove sigurnosti. Rad ujedno može poslužiti kao podloga za daljnja istraživanja čiji je konačni cilj poboljšanje pravila za osnivanje i gradnju kontejnerskih brodova.

LITERATURA

- [1] C.A. Airriess, *Regional production, information-communication technology, and the developmental state: the rise of Singapore as a global container hub*, *Geoforum* 32 (2001), p. 235-254
- [2] J.P. Rodrigue, C. Comtois, B. Slack, *The Geography of Transport Systems*, Routledge, New York, USA, 2006.
- [3] D.Y. Coulter, *Globalization and Maritime Power, Chapter 7: Globalization of Maritime Commerce: The Rise of Hub Ports*, National Defence University Press, Washington, USA, 2002.
- [4] ..., *Container Transshipment and Demand for Container Terminal Capacity in Scotland*, Transport Research Institute, Napier University, Edinburgh, Scotland, UK, 2003.
- [5] P.J.M. Meersmans, *Optimization of Container Handling Systems*, Ph.D Thesis, Tinbergen Institute 271, Erasmus University Rotterdam, 2002.
- [6] H.G. Payer, *Technological and Economic Implications of Mega Container Carriers*, *Transactions SNAME*, Vol. 109 (2001), p. 101-120
- [7] ..., *Opinion of European Economic and Social Committee on 'Europe's accessibility by sea in the future: developments and how to anticipate them'*, *Official Journal C* 157 (2005), p. 141-146
- [8] J. Wang, P. Foinikis, *Formal safety assessment of containerships*, *Marine Policy* 25 (2001), p.143-157
- [9] D. Tozer, A. Penfold, *Energy Prices and Container Shipping*, Design & Operation of Container Ships, RINA, London, UK, 2006.
- [10] ..., *Regional Shipping and Port Development Strategies (Container Traffic Forecast)*, Economic and Social Commission for Asia and the Pacific (ESCAP), United Nations, New York, 2005.
- [11] F. Mewis, H. Klug, *The Challenge of Very Large Container Ships – A Hydrodynamic View*, 9th Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures, Luebeck-Travemuende, Germany, 2004
- [12] B. Shi et al, *Technology Advances in Design and Operation of Large Container Carriers*, Design & Operation of Container Ships, RINA, London, UK, 2006.
- [13] K. Cullinane, M. Khanna, *Economies of scale in large containerships: optimal size and geographical implications*, *Journal of Transport Geography* 8 (2000), p. 181-195

- [14] J.O. Probst, *Development of 13,400 TEU Post-Panamax Container Ships*, Design & Operation of Container Ships, RINA, London, UK, 2006.
- [15] A. Penfold, *Changes in the Shipping Industry and Port Implications*, International Conference on Port Maritime Development and Innovation, Rotterdam, 2005.
- [16] D. Tozer, *Ultra-large container ships: the green ships of the future?*, Shipping World & Shipbuilder, 2003
- [17] N. Khalid, *The impact of cargo trends on terminal developments in Asia*, 3rd ASEAN Ports & Shipping Conference, Surabaya, Indonesia, 2005.
- [18] ..., *Propulsion Trends in Container Vessels*, MAN B&W, 2005.
- [19] H. Schmid, *Latest Engine Technologies Bring Benefits in Container Ships*, Design & Operation of Container Ships, RINA, London, UK, 2006.
- [20] A. Akiyama, G. Horn, K.M. Wong, *Structural Design Challenges of Ultra Large Containerships*,
- [21] J. Kvålsvold et al, *Strength Assessment of Ultra-Large Container Carriers by Direct Load Calculation*, Design & Operation of Container Ships, RINA, London, UK, 2003.
- [22] Y.S. Shin et al, *Dynamic Loadings for Structural Analysis of Fine Form Container Ship Based on a Non-Linear Large Amplitude Motions and Loads Method*,
- [23] M.K. Wu, T. Moan, *Linear and Nonlinear Hydroelastic Analysis of High-Speed Vessels*, Journal of Ship Research, Vol. 40 (1996), No. 2, p. 149-163
- [24] R.A. Goodman, *Wave-excited main hull vibration in large tankers and bulk carriers*, Transactions RINA 113 (1971), p. 167-184
- [25] D. Hoffman, R.W. Van Hooff, *Experimental and theoretical evaluation of springing on a great lakes bulk carrier*, International Shipbuilding Progress, 1974.
- [26] R.E.D. Bishop, W.G. Price, *Hydroelasticity of Ships*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1979
- [27] R.E.D. Bishop, J.D. Clarke, W.G. Price, *Comparison of full scale and predicted response of two frigates in severe weather trial*, Transactions RINA, 128:205-215, (1986)
- [28] R.E.D. Bishop, W.G. Price, Y. Wu, *A general linear hydroelasticity theory of floating structures moving in seaway*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A 316 (1986), p. 375-426
- [29] E. Moe, G. Holtmark, G. Storhaug, *Full Scale Measurements of the Wave Induced Hull Girder Vibrations of an Ore Carrier Trading in the North Atlantic*, Design & Operation of Bulk Carriers, RINA, London, UK, 2005.

- [30] T.E. Schellin et al, *Numerical and Experimental Investigation to Evaluate Wave-Induced Global Design Loads for Fast Ships*,
- [31] O.A. Hermundstad, J.V. Aarsnes, T. Moan, *Linear Hydroelastic Analysis of High-Speed Catamarans and Monohulls*, Journal of Ship Research, Vol. 43 (1999), No. 1, p. 48-63
- [32] S.H. Miao, P. Temarel, J.K. Hampshire, *Dynamic loads on a trimaran travelling in irregular seaways, including slamming*, Hydroelasticity in Marine Technology, Oxford, UK, 2003.
- [33] C.H. Lee, J.N. Newman, *An Assessment of Hydroelasticity for Very Large Hinged Vessels*, Journal of Fluids and Structures 14 (2000), p. 957-970
- [34] Š. Malenica, B. Molin, F. Remy, I. Senjanović, *Hydroelastic response of a barge to impulsive and non-impulsive wave loads*, 3rd International Conference on Hydroelasticity, Oxford, UK, 2003.
- [35] ..., *Dynamic Response*, Committee II.2, Proceedings of The 13th International Ship and Offshore Structures Congress, Trondheim, Norway, 1997.
- [36] S.E. Hirdaris, W.G. Price, P. Temarel, *Hydroelastic analysis of a bulk carrier*, International Conference on Ship and Shipping Research, NAV 2000, Venice, Italy, 2000.
- [37] S.E. Hirdaris, W.G. Price, P. Temarel, *Two- and three-dimensional hydroelastic modelling of a bulk carrier in regular waves*, Marine structures 16 (2003), p. 627-658
- [38] ..., *Dynamic Response*, Committee II.2, Proceedings of The 15th International Ship and Offshore Structures Congress, San Diego, USA, 2003.
- [39] ..., *Dynamic Response*, Committee II.2, Proceedings of The 16th International Ship and Offshore Structures Congress, Southampton, UK, 2006.
- [40] A. Ledoux, C. Mary, N. Couty, *Modelling of Springing and Whipping of FSPO's in a Time Domain Sea-keeping Tool*, Proceedings of The 14th International Offshore and Polar Engineering Conference, Toulon, France, 2004.
- [41] X.J. Chen et al, Review of hydroelasticity theories for global response of marine structures, Ocean Engineering 33 (2006), p. 439-457
- [42] J.N. Newman, *Wave effects on deformable bodies*, Applied Ocean Research, Vol. 16 (1994), p. 47-59
- [43] I. Senjanović, *Vibracije broda I*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1974.
- [44] R. Grubišić, *Proračun spregnutih horizontalnih i torzionih vibracija brodskog trupa sa širokim palubnim otvorima*, Magistarski rad, FSB, Zagreb, 1976.

- [45] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1993.
- [46] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method, Volume 1, Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill Book Company, London, UK, 1997.
- [47] R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis*, John Wiley & Sons, New York, USA, 2004.
- [48] I. Senjanović, *Vibracije broda II*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1990.
- [49] I. Senjanović, R. Grubišić, *Coupled horizontal and torsional vibration of ship hull with large deck openings*, Proc. EUROMECH Colloquium 122 (1979), Numerical Analysis of the Dynamics of Ship Structures, Paris, p. 539-556
- [50] I. Senjanović, R. Grubišić, *Coupled horizontal and torsional vibration of a ship hull with large hatch openings*, Computers & Structures, Vol. 41 (1991), No. 2, p. 213-226
- [51] R. Grubišić, *Analiza spregnutih vibracija brodskog trupa*, Disertacija, FSB, Zagreb, 1981.
- [52] J.N. Newman, *Marine Hydrodynamics*, The Massachusetts Institute of Technology (MIT) Press, Cambridge, USA, 1986.
- [53] O.M. Faltinsen, *Sea Loads on Ships and Offshore Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [54] S.K. Chakrabarti, *Hydrodynamics of Offshore Structures*, Computational Mechanics Publications, Boston, USA, 1994.
- [55] J.J. Jensen, *Load and Global Response of Ships*, Elsevier Science, Kidlington, UK, 2001.
- [56] Z. Mravak, *Nelinearno opterećenje broda na visokim valovima*, Disertacija, FSB, Zagreb, 2002.
- [57] J. Prpić-Oršić, V. Čorić, *Pomorstvenost plovnih objekata*, Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2006.
- [58] W.G. Price, R.E.D. Bishop, *Probabilistic Theory of Ship Dynamics*, Chapman and Hall, London, UK, 2002.
- [59] R. Bhattacharyya, *Dynamics of Marine Vehicles*, John Wiley & Sons, New York, USA, 2002.
- [60] I. Senjanović, Š. Malenica, S. Tomašević, S. Rudan, *Methodology of Ship Hydroelasticity Investigation*, Brodogradnja (u pripremi)
- [61] R.F. Beck et al, *Motions in Waves, Principles of Naval Architecture*, Second Revision, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, New Jersey, USA, 1989.

- [62] Z. Mravak, *Analiza njihanja i valnog opterećenja vitkih višetrupaca na harmonijskom valu*, Magistarski rad, FSB, Zagreb, 1997.
- [63] J. Xia, Z. Wang, *Time-Domain Hydroelastic Theory of Ships Responding to Waves*, Journal of Ship Research, Vol. 41 (1997), No. 4, p. 286-300
- [64] Š. Malenica, *Second order internal loads in monochromatic waves*, BV Internal Report, NT 2665/DTA/SM, Pariz
- [65] S.X. Du, Y.S. Wu, *The Effect of Forward Speed on the Hydroelastic Behaviors of Ship Structures*, Practical Design of Ships and Mobile Units, Elsevier Science, 1998., p. 597-603
- [66] I. Senjanović, *Vibracije broda III*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1981.
- [67] K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1982.
- [68] I. Senjanović, *Harmonic Acceleration Method for Dynamic Structural Analysis*, Computers & Structures, Vol. 18 (1984), No. 1, p. 71-80
- [69] Ž. Lozina, *A Comparison of Harmonic Acceleration Method with the Other Commonly Used Methods for Calculation of Dynamic Transient Response*, Computers & Structures, Vol. 29 (1988), No. 2, p. 227-240
- [70] I. Senjanović, Ž. Lozina, *Application of the Harmonic Acceleration Method for Nonlinear Dynamic Analysis*, Computers & Structures, Vol. 47 (1993), No. 6, p. 927-937
- [71] I.Senjanović, J.Parunov, S.Tomašević, S.Rudan, *Harmonic acceleration method and applications*, The 5th World Congress on Computational Mechanics, WCCM V, Vienna, Austria, 2002.
- [72] ..., *STIFF, User's Manual*, FSB, Zagreb, 1990.
- [73] I.Senjanović, *Jedno rješenje problema torzije na brodovima za prijevoz kontejnera, I i II*, Brodogradnja 23 (1972), 1 i 2
- [74] I.Senjanović, *Torzija tankostjenih nosača*, Brodogradnja 24 (1973), 1
- [75] V. Žanić, *Proračun primarne čvrstoće (savijanje, torzija) brodskog trupa primjenom specijalnih konačnih elemenata*, VI Simpozij Teorija i praksa brodogradnje in memoriam prof. L.Sorta, Beograd, 1984.
- [76] I.Senjanović, Y. Fan, *A higher order theory of thin-walled girders with application to ship structures*, Computers & Structures, Vol. 43 (1992), No. 1, p. 31-52
- [77] I.Senjanović, I. Čatipović, S.Tomašević, *Coupled Horizontal and Torsional Vibrations of a Flexible Barge*, Engineering Structures (accepted)

- [78] I.Senjanović, I. Čatipović, S.Tomašević, *Coupled Flexural and Torsional Vibrations of Ship-Like Girders*, (in preparation)
- [79] I.Senjanović, Y. Fan, *Pontoon torsional strength analysis related to ships with large deck openings*, Journal of Ship Research, Vol. 35 (1991), No. 4, p. 339-351
- [80] F. Remy, B. Molin, A. Ledoux, *Experimental and numerical study of the wave response of a flexible barge*, Hydroelasticity in Marine Technology, Wuxi, China, 2006., p. 255-264
- [81] F. Remy, B. Molin, *Essais GIS-HYDRO sur une maquette de barge élastique, Analyse des résultats de mesure*, Rapport ESIM, Marseille, France, 2002.
- [82] V. Čorić, T. Agustinović, I. Senjanović, Y. Fan, *DYANA, Program for Ship Hull Vibration Analysis, User's Manual*, FSB, Zagreb, 1989.

KRATKI ŽIVOTOPIS

Stipe Tomašević rođen je 12. srpnja 1973. godine u Metkoviću. Osnovnu i srednju školu matematičko-informatičkog smjera završio je u Pločama.

U školskoj godini 1992/93 godine upisao je studij brodogradnje na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, na kojem je i diplomirao u svibnju 1998. godine, radom *Konstrukcija i čvrstoća broda za prijevoz bitumena*.

Od lipnja 1998. godine zaposlen je kao znanstveni novak na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu.

U listopadu iste godine upisuje poslijediplomski studij na smjeru Brodogradnja i pomorska tehnika, za vrijeme kojeg čini devetomjesečni prekid zbog odlaska na odsluženje vojnog roka. U ožujku 2003. godine obranio je magistarski rad naslovljen *Dinamička izdržljivost brodskih konstrukcija*.

Od svibnja 2003. godine do srpnja 2004. godine, nalazio se na studijskom boravku pri Instituto Superior Tecnico u Lisabonu, gdje je sudjelovao u radu na znanstveno-istraživačkom projektu Europske zajednice *Reliability Based Structural Design of FPSO Systems*.

U okviru izrade ovog doktorskog rada, šest je mjeseci, od travnja do listopada 2006. godine, boravio u Parizu, radeći u Istraživačkom odjelu Bureau Veritasa.

Pod vodstvom akademika Ive Senjanovića, sudjeluje u znanstveno-istraživačkim projektima MZOS-a te u većem broju složenih studija i analiza provedenih na Katedri za konstrukciju plovniha objekata za potrebe domaćih i stranih naručitelja.

Autor je i koautor više od 20 znanstvenih i stručnih radova. Služi se engleskim jezikom.

SHORT BIOGRAPHY

Stipe Tomašević was born in Metković on July 12th, 1973. He completed primary and secondary school in Ploče.

In the academic year 1992/93, he started a nine-semester study in naval architecture at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, where he graduated in May of 1998, with the thesis *Structure and strength of asphalt carrier*.

In June of 1998, he began to work as a junior researcher at the Department of Naval Architecture and Marine Engineering of the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture in Zagreb.

In October of 1998, he joined a four-semester postgraduate study in naval architecture and marine engineering, during which he took a nine month break for mandatory military service. In March of 2003, he received academic title of Master of Science, after successfully defending the thesis titled *Fatigue strength of ship structures*.

During his research visit at Instituto Superior Tecnico in Lisbon (May 2003 – July 2004), he participated in European Union project *Reliability Based Structural Design of FPSO Systems*.

He also visited Bureau Veritas in Paris (April 2006 – October 2006), where, at the Research department, he worked on part of this phd thesis.

Under the leadership of academic Ivo Senjanović, he participates in scientific projects of MZOS, as well as in a number of complex analyses conducted at the Chair of Ship Structure Design for domestic and foreign investors.

As author and co-author he published more than 20 scientific papers. He speaks English.

PRILOG A

Jednadžba konačnog elementa

Formule za unutrašnje sile

Jednadžba konačnog elementa glasi:

$$\{f\} = [k]\{\delta\} - \{q\}, \quad (\text{A.1})$$

gdje je:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{bs} & 0 \\ 0 & k_{tw} \end{bmatrix} - \lambda^2 \begin{bmatrix} m_{bs} & m_{st} \\ m_{ts} & m_{tw} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

generalizirana matrica krutosti konačnog elementa, a:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

vektor vanjskog opterećenja.

Generalizirana matrica krutosti uključuje savojno-smičnu matricu krutosti:

$$[k]_{bs} = \frac{2EI}{(1+12\beta)l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ & 2(1+3\beta)l^2 & -3l & (1-6\beta)l^2 \\ & & 6 & -3l \\ \text{Sym.} & & & 2(1+3\beta)l^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

matricu krutosti uvijanje-vitoperenje:

$$[k]_{tw} = \frac{2EI_w}{l^3} \begin{bmatrix} 6 + \frac{3}{5}\gamma & \left(3 + \frac{\gamma}{20}\right)l & -\left(6 + \frac{3}{5}\gamma\right) & \left(3 + \frac{\gamma}{20}\right)l \\ & \left(2 + \frac{\gamma}{15}\right)l^2 & -\left(3 + \frac{\gamma}{20}\right)l & \left(1 - \frac{\gamma}{60}\right)l^2 \\ & & 6 + \frac{3}{5}\gamma & -\left(3 + \frac{\gamma}{20}\right)l \\ \text{Sym.} & & & \left(2 + \frac{\gamma}{15}\right)l^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

svojno-smičnu matricu masa:

$$[m]_{bs} = \frac{ml}{(1+12\beta)^2} \begin{bmatrix} \left(\frac{13}{35} + \frac{42}{5}\beta + 48\beta^2 + \frac{6}{5}\varepsilon\right) & \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{10}\beta + 6\beta^2\right)l + \varepsilon\left(\frac{1}{10} - 6\beta\right)l & \left(\frac{9}{70} + \frac{18}{5}\beta + 24\beta^2 - \frac{6}{5}\varepsilon\right) & -\left(\frac{13}{420} + \frac{9}{10}\beta + 6\beta^2\right)l + \varepsilon\left(\frac{1}{10} - 6\beta\right)l \\ \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{5}\beta + \frac{6}{5}\beta^2\right)l^2 + 2\varepsilon\left(\frac{1}{15} + \beta + 24\beta^2\right)l^2 & \left(\frac{13}{420} + \frac{9}{10}\beta + 6\beta^2\right)l - \varepsilon\left(\frac{1}{10} - 6\beta\right)l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{1}{5}\beta + \frac{6}{5}\beta^2\right)l^2 - \varepsilon\left(\frac{1}{30} + 2\beta - 24\beta^2\right)l^2 & -\left(\frac{1}{140} + \frac{1}{5}\beta + \frac{6}{5}\beta^2\right)l^2 - \varepsilon\left(\frac{1}{30} + 2\beta - 24\beta^2\right)l^2 \\ \text{Sym.} & & \left(\frac{13}{35} + \frac{42}{5}\beta + 48\beta^2 + \frac{6}{5}\varepsilon\right) & -\left(\frac{11}{210} + \frac{11}{10}\beta + 6\beta^2\right)l - \varepsilon\left(\frac{1}{10} - 6\beta\right)l \\ & & \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{5}\beta + \frac{6}{5}\beta^2\right)l^2 + 2\varepsilon\left(\frac{1}{15} + \beta + 24\beta^2\right)l^2 & \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{5}\beta + \frac{6}{5}\beta^2\right)l^2 + 2\varepsilon\left(\frac{1}{15} + \beta + 24\beta^2\right)l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

matricu masa uvijanje-vitoperenje:

$$[m]_{\theta w} = J_m^* l \begin{bmatrix} \left(\frac{13}{35} + \frac{6}{5}\kappa\right) & \left(\frac{11}{210} + \frac{\kappa}{10}\right)l & \frac{9}{70} - \frac{6}{5}\kappa & \left(-\frac{13}{420} + \frac{\kappa}{10}\right)l \\ \left(\frac{1}{105} + \frac{2}{15}\kappa\right)l^2 & \left(\frac{13}{420} - \frac{\kappa}{10}\right)l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{\kappa}{30}\right)l^2 & -\left(\frac{1}{140} + \frac{\kappa}{30}\right)l^2 \\ \text{Sym.} & & \left(\frac{13}{35} + \frac{6}{5}\kappa\right) & -\left(\frac{11}{210} + \frac{\kappa}{10}\right)l \\ & & \left(\frac{1}{105} + \frac{2}{15}\kappa\right)l^2 & \left(\frac{1}{105} + \frac{2}{15}\kappa\right)l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

i smično-torzijsku matricu masa:

$$[m]_{st} = [m]_{ts} = \frac{mlz}{1+12\beta} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} + \frac{21}{5}\beta & \left(\frac{11}{210} + \frac{2}{5}\beta\right)l & \frac{9}{70} + \frac{9}{5}\beta & -\left(\frac{13}{420} + \frac{2}{5}\beta\right)l \\ \left(\frac{11}{210} + \frac{1}{2}\beta\right)l & \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{10}\beta\right)l^2 & \left(\frac{13}{420} + \frac{1}{2}\beta\right)l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{1}{10}\beta\right)l^2 \\ \frac{9}{70} + \frac{9}{5}\beta & \left(\frac{13}{420} + \frac{2}{5}\beta\right)l & \frac{13}{35} + \frac{21}{5}\beta & -\left(\frac{11}{210} + \frac{3}{5}\beta\right)l \\ -\left(\frac{13}{420} + \frac{1}{2}\beta\right)l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{1}{10}\beta\right)l^2 & -\left(\frac{11}{210} + \frac{1}{2}\beta\right)l & \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{10}\beta\right)l^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

dok je vektor vanjskog opterećenja sastavljen od vektora smičnog:

$$\{q_1\} = \frac{q_0 l}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ l \\ 6 \\ -l \end{bmatrix} + \frac{q_1 l}{60(1+12\beta)} \begin{bmatrix} 9+120\beta \\ (2+30\beta)l \\ 21+240\beta \\ -(3+30\beta)l \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

i vektora torzijskog opterećenja

$$\{q_2\} = \frac{\mu_0 l}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ l \\ 6 \\ -l \end{Bmatrix} + \frac{\mu_1 l}{60} \begin{Bmatrix} 9 \\ 2l \\ 21 \\ -3l \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

U gornjim se izrazima koriste sljedeće bezdimenzionalne veličine:

$$\beta = \frac{EI}{GF l^2}, \quad y = \frac{GI_l l^2}{EI_w}, \quad \varepsilon = \frac{J_b}{ml^2}, \quad \kappa = \frac{J_w}{J_m^* l^2}. \quad (\text{A.11})$$

Funkcije oblika momenata savijanja određuju se kao:

$$M_i = -EI \frac{d^2 w_i}{dx^2} = -EI \langle a_{ik}^{(2)} \rangle \{ \xi^k \} \quad k = 0,1,2,3, \quad (\text{A.12})$$

gdje je $\langle a_{ik}^{(2)} \rangle$ dan izrazom (2.143), a one smičnih sila kao:

$$Q_i = GF \frac{dv_i}{dx} = -\lambda^2 J_b \langle a_{ik}^{(1)} \rangle \{ \xi^k \} - EI \langle a_{ik}^{(3)} \rangle \{ \xi^k \} \quad k = 0,1,2,3, \quad (\text{A.13})$$

gdje $\langle a_{ik}^{(1)} \rangle$ donosi jednadžba (2.141), dok je:

$$\langle a_{ik}^{(3)} \rangle = \frac{2}{l^3} \langle 3a_{i3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle. \quad (\text{A.14})$$

Funkcije oblika momenata čistog uvijanja računaju se prema:

$$M_{ti}^0 = GI_t \frac{d\psi_i}{dx} = GI_t \langle d_{ik}^{(1)} \rangle \{ \xi^k \} \quad k = 0,1,2,3, \quad (\text{A.15})$$

gdje je $\langle d_{ik}^{(1)} \rangle$ dan izrazom (2.141); one momenata uvijanja zbog ograničenog vitoperenja poprečnog presjeka kao:

$$M_{ti}^* = -EI_w \frac{d^3 \psi_i}{dx^3} = -EI_w \langle d_{ik}^{(3)} \rangle \{ \xi^k \} \quad k = 0,1,2,3, \quad (\text{A.16})$$

gdje je:

$$\langle d_{ik}^{(3)} \rangle = \frac{2}{l^3} \langle 3d_{i3} \ 0 \ 0 \ 0 \rangle, \quad (\text{A.17})$$

a funkcije oblika bimomenata kao:

$$T_i = EI_w \frac{d^2 \psi_i}{dx^2} = EI_w \langle d_{ik}^{(2)} \rangle \{ \xi^k \} \quad k = 0,1,2,3, \quad (\text{A.18})$$

gdje je:

$$\langle d_{ik}^{(2)} \rangle = \frac{2}{l^2} \langle d_{i2} \ 3d_{i3} \ 0 \ 0 \rangle. \quad (\text{A.19})$$

Unutrašnje sile u odabranim presjecima trupa određuju se interpolacijom (funkcijama oblika), na temelju vrijednosti čvornih pomaka:

$$M = \langle M_i \rangle \{ U_i \} \quad (\text{A.20a})$$

$$Q = \langle Q_i \rangle \{ U_i \} \quad (\text{A.20b})$$

$$M_t^0 = \langle M_{ti}^0 \rangle \{ V_i \} \quad (\text{A.20c})$$

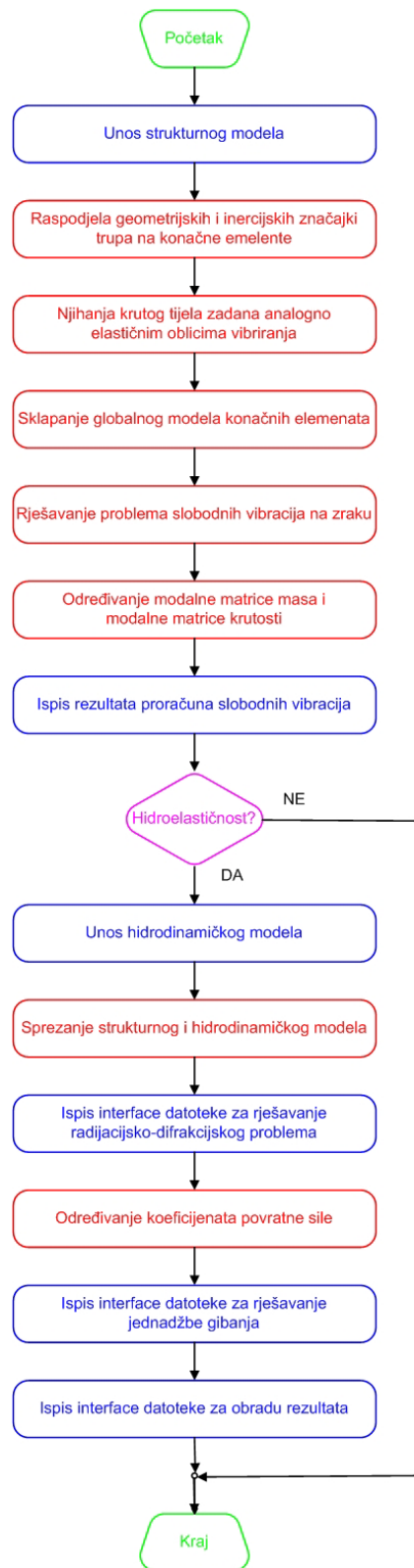
$$M_t^* = \langle M_{ti}^* \rangle \{ V_i \} \quad (\text{A.20c})$$

$$T = \langle T_i \rangle \{ V_i \}, \quad (\text{A.20d})$$

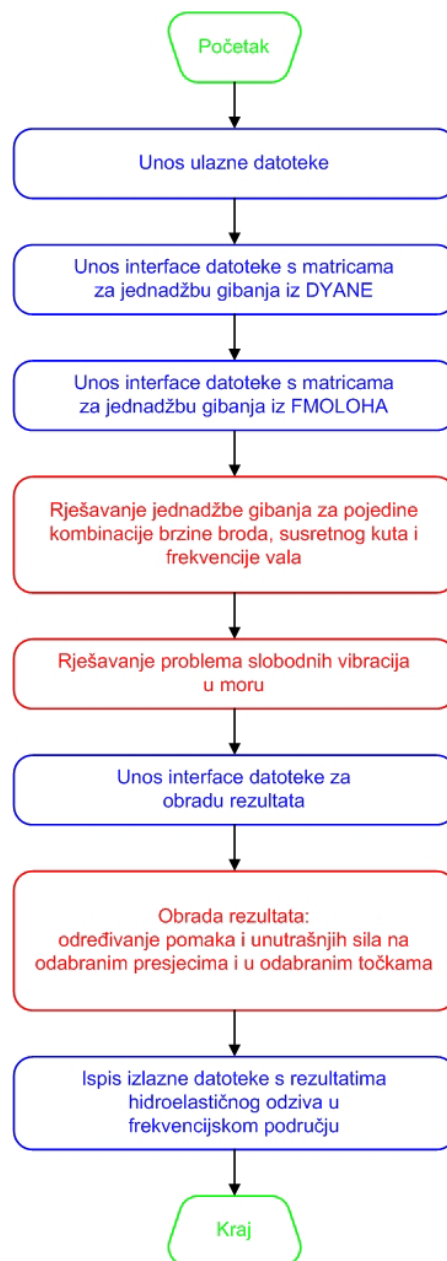
gdje su vektori čvornih pomaka savijanja i uvijanja dani izrazima (2.130) i (2.131). Budući da se rješenje za čvorne pomake dobiva u globalnom koordinatnom sustavu (na razini težišta broda), iste je, prilikom određivanja unutrašnjih sila, potrebno transformirati natrag u lokalni koordinatni sustav konačnog elementa (izrazom suprotnim onom (2.210)).

PRILOG B

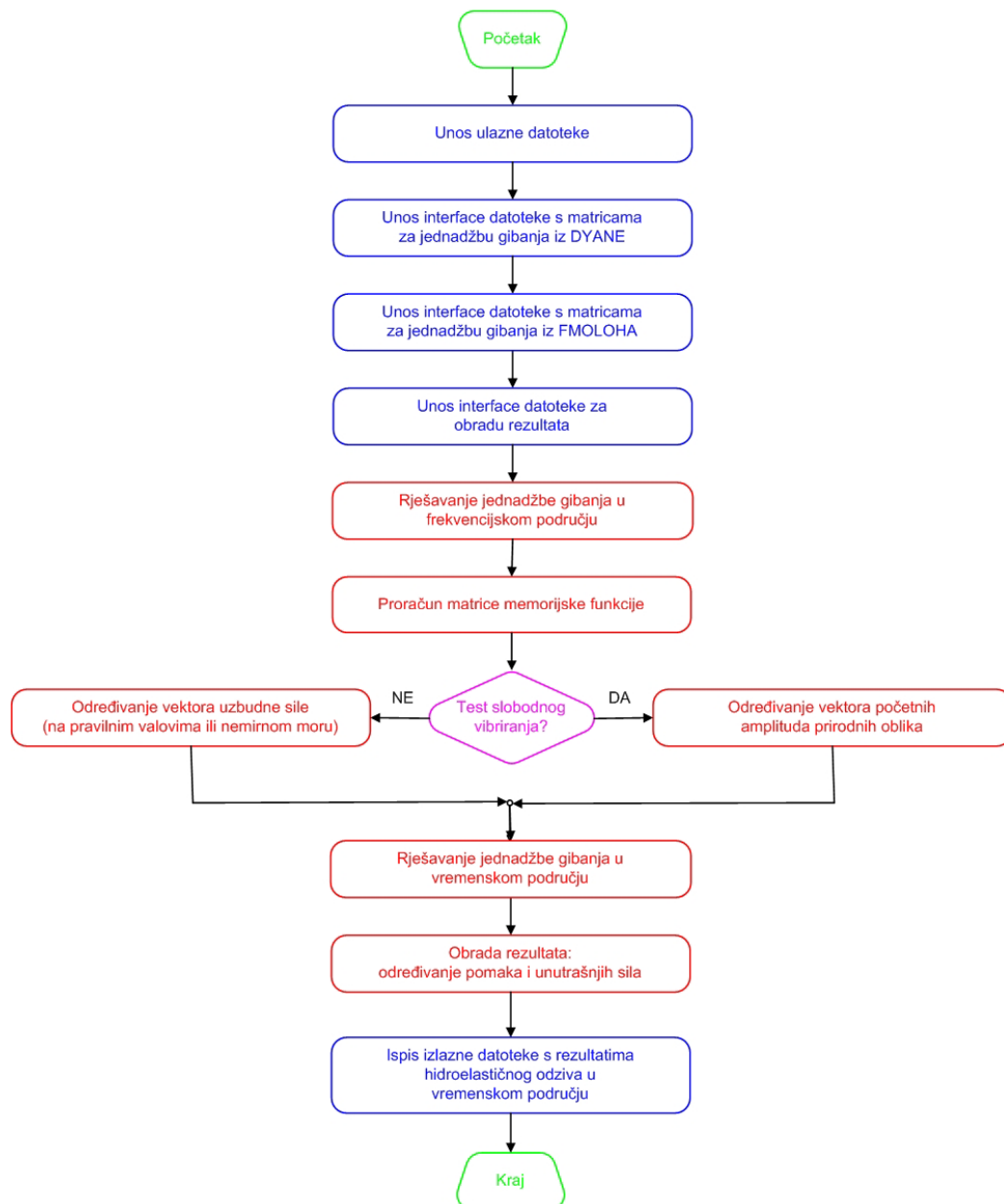
Pojednostavljeni dijagrami toka razvijenih računalnih programa



Slika B.1 Pojednostavljeni dijagram toka programa DYANA



Slika B.2 Pojednostavljeni dijagram toka programa MECAP



Slika B.3 Pojednostavljeni dijagram toka programa TDP

PRILOG C

**Izravno integriranje diferencijalne jednačbe spregnutih horizontalnih i torzijskih
vibracija prizmatičnog nosača**

Diferencijalne jednadžbe spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija za prizmatični nosač otvorenog poprečnog presjeka (2.109) i (2.113) glase:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{d^4 w_x}{dx^4} + \lambda^2 \left(m \frac{EI}{GF} + J_b \right) \frac{d^2 w_x}{dx^2} + \lambda^2 \left(\lambda^2 \frac{J_b}{GF} - 1 \right) m w_x - \lambda^2 m z \psi_x &= \\
 = q_x - \frac{d\mu_x}{dx} - \lambda^2 \frac{m}{GF_x} \int \mu_x dx & \\
 EI_w \frac{d^4 \psi_x}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} - \lambda^2 J_m^* \psi_x + \lambda^2 m z \frac{EI}{GF} \frac{d^2 w_x}{dx^2} + \lambda^2 \left(\lambda^2 \frac{J_b}{GF} - 1 \right) m z w_x &= \\
 = q_x z + \mu_{tx} + \lambda^2 \frac{mz}{GF_x} \int \mu_x dx . &
 \end{aligned}$$

Uz zanemarivanje inercijskih sila uslijed zakretanja poprečnog presjeka oko z-osi koje malo utječu na vibracije, diferencijalne jednadžbe prirodnih spregnutih vibracija prelaze u jednostavniji oblik:

$$EI \frac{d^4 w_x}{dx^4} + \omega^2 m \frac{EI}{GF} \frac{d^2 w_x}{dx^2} - \omega^2 m (w_x + z \psi_x) = 0 \quad (C.1a)$$

$$EI_w \frac{d^4 \psi_x}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} - \omega^2 J_m^* \psi_x - \omega^2 m z \left(w_x - \frac{EI}{GF} \frac{d^2 w_x}{dx^2} \right) = 0 . \quad (C.1b)$$

Uvrštavanjem rješenja sustava, pretpostavljenog u eksponencijalnom obliku:

$$w_x = A e^{\rho x} \quad (C.2)$$

$$\psi_x = B e^{\rho x} , \quad (C.3)$$

gdje su A i B nepoznate konstante integracije, u izraze (C.1a) i (C.1b), dobiva se homogeni sustav algebarskih jednadžbi:

$$\rho^4 EI A e^{\rho x} + \rho^2 \omega^2 m \frac{EI}{GF} A e^{\rho x} - \omega^2 m (A e^{\rho x} + z B e^{\rho x}) = 0 \quad (C.4a)$$

$$\rho^4 EI_w B e^{\rho x} - \rho^2 GI_t B e^{\rho x} - \omega^2 J_m^* B e^{\rho x} - \omega^2 m z \left(A e^{\rho x} - \rho^2 \frac{EI}{GF} A e^{\rho x} \right) = 0 , \quad (C.4b)$$

koji se može napisati i u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} EI \rho^4 + \omega^2 m \frac{EI}{GF} \rho^2 - \omega^2 m & \omega^2 m z \\ \omega^2 m z \left(\frac{EI}{GF} \rho^2 - 1 \right) & EI_w \rho^4 - GI_t \rho^2 - \omega^2 J_m^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \{0\} . \quad (C.5)$$

Determinanta sustava glasi:

$$\left(EI\rho^4 + \omega^2 m \frac{EI}{GF} \rho^2 - \omega^2 m \right) \left(EI_w \rho^4 - GI_t \rho^2 - \omega^2 J_m^* \right) + (\omega^2 m z)^2 \left(\frac{EI}{GF} \rho^2 - 1 \right) = 0 \quad (C.6)$$

Članovi u prve dvije zagrade predstavljaju karakteristične (frekventne) jednadžbe savojnih i torzijskih vibracija, dok posljednji član odražava sprezanje.

Razvojem gornje jednadžbe:

$$\begin{aligned} \rho^8 EIEI_w - \rho^6 EIGI_t - \rho^4 EI\omega^2 J_m^* + \rho^6 \omega^2 m \frac{EI}{GF} EI_w - \rho^4 \omega^2 m \frac{EI}{GF} GI_t - \rho^2 \omega^4 m \frac{EI}{GF} J_m^* - \\ - \rho^4 \omega^2 m EI_w + \rho^2 \omega^2 m GI_t + \omega^4 m J_m^* + \rho^2 \omega^4 m^2 z^2 \frac{EI}{GF} - \omega^4 m^2 z^2 = 0, \end{aligned} \quad (C.7a)$$

nakon sređivanja:

$$\begin{aligned} \rho^8 EIEI_w + \rho^6 \left(\omega^2 m \frac{EI}{GF} EI_w - EIGI_t \right) - \rho^4 \left(EI\omega^2 J_m^* + \omega^2 m \frac{EI}{GF} GI_t + \omega^2 m EI_w \right) + \\ + \rho^2 \left(\omega^2 m GI_t - \omega^4 m \frac{EI}{GF} J_m^* + \omega^4 m^2 z^2 \frac{EI}{GF} \right) + \left(\omega^4 m J_m^* - \omega^4 m^2 z^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (C.7b)$$

i dijeljenja s $EIEI_w$, slijedi:

$$\begin{aligned} \rho^8 + \rho^6 \left(\frac{\omega^2 m}{GF} - \frac{GI_t}{EI_w} \right) - \rho^4 \left(\frac{\omega^2 J_m^*}{EI_w} + \frac{\omega^2 m GI_t}{EI_w GF} + \frac{\omega^2 m}{EI} \right) + \\ + \rho^2 \left(\frac{\omega^2 m GI_t}{EIEI_w} - \frac{\omega^4 m J_m^*}{GFEI_w} + \frac{\omega^4 m^2 z^2}{GFEI_w} \right) + \frac{1}{EIEI_w} \left(\omega^4 m J_m^* - \omega^4 m^2 z^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (C.7c)$$

Uz $\xi = \rho^2$ dobiva se polinom četvrtog stupnja:

$$P_4(\xi) = a\xi^4 + b\xi^3 + c\xi^2 + d\xi + e, \quad (C.8)$$

gdje su:

$$a = 1 \quad (C.9a)$$

$$b = \frac{\omega^2 m}{GF} - \frac{GI_t}{EI_w} \quad (C.9b)$$

$$c = -\frac{\omega^2 m}{EI} \left[1 + \frac{EI}{EI_w} \left(\frac{J_m^*}{m} + \frac{GI_t}{GF} \right) \right] \quad (C.9c)$$

$$d = \frac{\omega^2 m}{EI_w} \left[\frac{GI_t}{EI} + \frac{\omega^2 m z^2}{GF} \left(1 - \frac{J_m^*}{m z^2} \right) \right] \quad (C.9d)$$

$$e = \frac{\omega^4 m}{EIEI_w} \left(J_m^* - m z^2 \right). \quad (C.9e)$$

Pretpostavi li se, analogno rješenju raspregnutih vibracija [77, 78], da su dva korijena polinoma pozitivna, a dva negativna:

$$\begin{aligned}\xi_1 &> 0 \\ \xi_2 &> 0 \\ \xi_3 &< 0 \\ \xi_4 &< 0\end{aligned}\tag{C.10}$$

vrijedi:

$$\begin{aligned}\rho_{1,2} &= \pm\sqrt{\xi_1} = \pm\eta \\ \rho_{3,4} &= \pm\sqrt{\xi_2} = \pm\chi \\ \rho_{5,6} &= \pm\sqrt{\xi_3} = \pm i\kappa \\ \rho_{7,8} &= \pm\sqrt{\xi_4} = \pm i\lambda\end{aligned}\tag{C.11}$$

tako da se, prema izrazu (C.2), progib savijanja može predstaviti u sljedećem obliku:

$$w_x = A_1' e^{\eta x} + A_2' e^{-\eta x} + A_3' e^{\chi x} + A_4' e^{-\chi x} + A_5' e^{i\kappa x} + A_6' e^{-i\kappa x} + A_7' e^{i\lambda x} + A_8' e^{-i\lambda x}.\tag{C.12a}$$

Uz:

$$\begin{aligned}e^{kx_3} &= \cosh kx_3 + \sinh kx_3 \\ e^{-kx_3} &= \cosh kx_3 - \sinh kx_3 \\ e^{ik\alpha} &= \cos k\alpha + i \sin k\alpha \\ e^{-ik\alpha} &= \cos k\alpha - i \sin k\alpha\end{aligned}\tag{C.13}$$

slijedi:

$$\begin{aligned}w_x &= A_1' (\cosh \eta x + \sinh \eta x) + A_2' (\cosh \eta x - \sinh \eta x) + A_3' (\cosh \chi x + \sinh \chi x) + \\ &+ A_4' (\cosh \chi x - \sinh \chi x) + A_5' (\cos \kappa x + i \sin \kappa x) + A_6' (\cos \kappa x - i \sin \kappa x) + \\ &+ A_7' (\cos \lambda x + i \sin \lambda x) + A_8' (\cos \lambda x - i \sin \lambda x),\end{aligned}\tag{C.12b}$$

što, nakon sređivanja daje:

$$\begin{aligned}w_x &= A_1 \sinh \eta x + A_2 \cosh \eta x + A_3 \sinh \chi x + A_4 \cosh \chi x + A_5 \sin \kappa x + A_6 \cos \kappa x + \\ &+ A_7 \sin \lambda x + A_8 \cos \lambda x.\end{aligned}\tag{C.12c}$$

Konstanta integracije B može se, na osnovi jednadžbe (C.4a), izraziti kao:

$$B = \frac{1}{z} \left(\frac{EI}{\omega^2 m} \rho^4 + \rho^2 \frac{EI}{GF} - 1 \right) A = \frac{1}{z} P(\rho) A,\tag{C.14}$$

gdje je:

$$P(\rho) = \frac{EI}{\omega^2 m} \rho^4 + \rho^2 \frac{EI}{GF} - 1. \quad (C.15)$$

Kut uvijanja, prema jednađbi (C.3), uz uključivanje izrazâ (C.12c) i (C.15), glasi:

$$\begin{aligned} \psi_x = & \frac{1}{z} P(\eta) (A_1 \sinh \eta x + A_2 \cosh \eta x) + \frac{1}{z} P(\chi) (A_3 \sinh \chi x + A_4 \cosh \chi x) + \\ & + \frac{1}{z} P(\kappa) (A_5 \sin \kappa x + A_6 \cos \kappa x) + \frac{1}{z} P(\lambda) (A_7 \sin \lambda x + A_8 \cos \lambda x). \end{aligned} \quad (C.16)$$

Za slobodne krajeve nosača i spriječeno vitoperenje vrijede sljedeći rubni uvjeti:

$$\begin{aligned} M &= 0 \\ x = \pm l: \quad \begin{aligned} Q &= 0 \\ u &= 0 \end{aligned}, \\ M_t &= 0 \end{aligned} \quad (C.17a)$$

što se svodi na:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_x}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d^3 w_x}{dx^3} &= 0 \\ x = \pm l: \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_x}{dx} &= 0 \\ \frac{d^3 \psi_x}{dx^3} &= 0 \end{aligned}. \end{aligned} \quad (C.17b)$$

Simetrični oblici

Neparne konstante integracije A_1 , A_3 , A_5 i A_7 jednake su nuli, tako da je progib savijanja:

$$w_x = A_2 \cosh \eta x + A_4 \cosh \chi x + A_6 \cos \kappa x + A_8 \cos \lambda x, \quad (C.18)$$

a kut uvijanja:

$$\psi_x = \frac{1}{z} P(\eta) A_2 \cosh \eta x + \frac{1}{z} P(\chi) A_4 \cosh \chi x + \frac{1}{z} P(\kappa) A_6 \cos \kappa x + \frac{1}{z} P(\lambda) A_8 \cos \lambda x. \quad (C.19)$$

Zadovoljavanje rubnih uvjeta (C.17) rezultira sljedećim jednađbama:

$$\eta^2 A_2 \cosh \eta x + \chi^2 A_4 \cosh \chi x - \kappa^2 A_6 \cos \kappa x - \lambda^2 A_8 \cos \lambda x = 0 \quad (C.20a)$$

$$\eta^3 A_2 \sinh \eta x + \chi^3 A_4 \sinh \chi x + \kappa^3 A_6 \sin \kappa x + \lambda^3 A_8 \sin \lambda x = 0 \quad (C.20b)$$

$$\eta P(\eta) A_2 \sinh \eta x + \chi P(\chi) A_4 \sinh \chi x - \kappa P(\kappa) A_6 \sin \kappa x - \lambda P(\lambda) A_8 \sin \lambda x = 0 \quad (C.20c)$$

$$\eta^3 P(\eta) A_2 \sinh \eta x + \chi^3 P(\chi) A_4 \sinh \chi x + \kappa^3 P(\kappa) A_6 \sin \kappa x + \lambda^3 P(\lambda) A_8 \sin \lambda x = 0, \quad (\text{C.20d})$$

što se može prikazati i u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \eta^2 \cosh \eta x & \chi^2 \cosh \chi x & -\kappa^2 \cos \kappa x & -\lambda^2 \cos \lambda x \\ \eta^3 \sinh \eta x & \chi^3 \sinh \chi x & \kappa^3 \sin \kappa x & \lambda^3 \sin \lambda x \\ \eta P(\eta) \sinh \eta x & \chi P(\chi) \sinh \chi x & -\kappa P(\kappa) \sin \kappa x & -\lambda P(\lambda) \sin \lambda x \\ \eta^3 P(\eta) \sinh \eta x & \chi^3 P(\chi) \sinh \chi x & \kappa^3 P(\kappa) \sin \kappa x & \lambda^3 P(\lambda) \sin \lambda x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \\ A_6 \\ A_8 \end{bmatrix} = \{0\}. \quad (\text{C.21})$$

Antisimetrični oblici

Analogno opisanom postupku, uz izjednačavanje parnih konstanti integracije A_2 , A_4 , A_6 i A_8 s nulom, dolazi se do sljedeće matrične jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} \eta^2 \sinh \eta x & \chi^2 \sinh \chi x & -\kappa^2 \sin \kappa x & -\lambda^2 \sin \lambda x \\ \eta^3 \cosh \eta x & \chi^3 \cosh \chi x & -\kappa^3 \cos \kappa x & -\lambda^3 \cos \lambda x \\ \eta P(\eta) \cosh \eta x & \chi P(\chi) \cosh \chi x & \kappa P(\kappa) \cos \kappa x & \lambda P(\lambda) \cos \lambda x \\ \eta^3 P(\eta) \cosh \eta x & \chi^3 P(\chi) \cosh \chi x & -\kappa^3 P(\kappa) \cos \kappa x & -\lambda^3 P(\lambda) \cos \lambda x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_7 \end{bmatrix} = \{0\}. \quad (\text{C.22})$$

Oba navedena problema vlastitih vrijednosti, u sprezi s polinomom (c.8), rješavaju se numeričkim metodama [45]. Energetski postupak objašnjen je u [77, 78].